

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ • P. FUNK-WIEN • W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN • F. JUNG-WIEN • F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN • H. MELAN-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND XII, HEFT 1 und 2 (SCHLUSSHEFT)

MIT 16 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 1. SEPTEMBER 1958)



WIEN
SPRINGER-VERLAG

1958

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5
Tel. 63 96 14, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in mindestens einer dieser drei Sprachen vorangestellt werden, die vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen, mitzuliefern ist.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10 % der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band XII, Heft 1 und 2

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Franz Magyar † (F. Schulz)	1
<i>Originalarbeiten</i>	
H. Hofmann, Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld. Zweiter Teil: Stationäres Magnetfeld, nichtstationäres, elektromagnetisches Feld. (Mit 1 Textabbildung.)	3
C. Torre, On the Motion of Plastic Mass	25
L. Kirste, Druckstäbe geringsten Gewichts. (Mit 4 Textabbildungen.)	36
A. Huber, Parallelstromrekuperatoren mit temperaturabhängiger Wärmedurchgangszahl. (Mit 1 Textabbildung.)	41
H. Scholz, Das Verfahren von Krylow-Bogoljubow zur Behandlung nichtlinearer Schwingungsprobleme. (Mit 2 Textabbildungen.)	47
W. Müller, Zur Ableitung der elastostatischen Gleichungen für die Rotationsschalen aus dem Minimalprinzip der Variationsrechnung	59
E. Bukovics, Prinzipien bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Methoden zur Abschätzung des Fehlers	66
F. Buckens, Über Eigenwertscharen. (Mit 2 Textabbildungen.)	82
R. Gran Olsson, Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. (Mit 3 Textabbildungen.)	93
J. S. Frame, Eine Lösung in Kettenbrüchen für die Kármánsche Theorie der Rohrbiegung	95
K. Girkmann und R. Beer, Anwendung der verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten. (Mit 2 Textabbildungen.)	101
Alfred Basch † (H. Parkus)	110
<i>Buchbesprechungen</i>	111
Kauderer, H., Nichtlineare Mechanik (H. Parkus). — Bisplinghoff, R. L., The Finite Twisting and Bending of Heated Elastic Lifting Surfaces (H. Parkus). — Kinney, J. St., Indeterminate Structural Analysis (F. Chmelka). — Burton, R., Vibration and Impact (H. Parkus). — Verformung und Fließen des Festkörpers, herausgegeben von Grammel, R., (H. Parkus).	

Franz Magyar †

Am 4. September 1958 starb völlig unerwartet der Rektor der Technischen Hochschule Wien, Magnifizienz ordentlicher Professor Dipl.-Ing. Dr. techn. Franz Magyar, Vorstand des Institutes für Strömungslehre, im 65. Lebensjahr. Seine Verdienste wurden anlässlich seines 60. Geburtstages in dieser Zeitschrift eingehend gewürdigt*).

Magyar wurde am 6. Mai 1894 in Wien geboren und begann seine Studien als Hörer der Fakultät für Maschinenwesen im Jahre 1912 an jener Hochschule, mit der er sein



langes Berufsleben hindurch engstens verbunden blieb und die ihn schließlich noch ein Jahr vor seinem Tode zu ihrem höchsten Amt als Rektor magnificus berief. Magyar unterbrach seine Studien nach der ersten Staatsprüfung im Jahre 1915 zur Ableistung des Militärdienstes. Ein Jahr später wurde er zur Luftfahrttruppe überstellt, wo man ihn mit flugtechnischen Spezialaufgaben betraute. Das Zusammentreffen mit hervorragenden Wissenschaftlern, wie Hopf, von Kármán, Knoller und von Mises, dürfte zu seiner späteren Vorliebe für die Strömungstechnik wesentlich beigetragen haben. Nach Kriegsende schloß Magyar seine Studien am 26. Juni 1919 mit der zweiten Staatsprüfung ab und begann am 1. Januar 1920 seine akademische Laufbahn als Assistent an der Lehrkanzel Hofrat Professor Ing. A. Budau. Im gleichen Jahr noch erhielt er seinen ersten Lehrauftrag zur Abhaltung der Vorlesungen aus Hydraulik.

*) Österr. Ing.-Arch. 8, S. 79 (1954). (Mit einem Verzeichnis von 41 Originalarbeiten.)

Trotz seiner hauptberuflichen Verpflichtungen als Professor für Mechanik, Maschinenkunde, Physik und Elektrisches Laboratorium an der Bundeslehranstalt für Maschinenbau und Elektrotechnik in Wien X in den Jahren 1921 bis 1938 war er weiter an der Hochschule tätig. Nach Budaus Tod im Jahre 1923 wurde ihm die Supplierung der Fächer Hydraulik, Wasserkraftmaschinen und Pumpen der nunmehr verwaisten Lehrkanzel und die Leitung des Hydromechanischen Laboratoriums übertragen.

Am 10. Juli 1923 promovierte Magyar zum Doktor der technischen Wissenschaften und habilitierte sich am 24. Oktober 1927. Als Privatdozent hielt er zusätzlich Vorlesungen über ausgewählte Kapitel aus der Hydraulik, über Strömungstechnik und spezielle Probleme der technischen Strömungslehre. Seine erfolgreiche Lehr- und umfangreiche Forschungstätigkeit wurde am 3. Juli 1937 durch die Verleihung des Titels eines außerordentlichen Hochschulprofessors und schließlich durch die Berufung zum ordentlichen Professor für Strömungslehre gewürdigt, die am 17. Dezember 1945, auf Grund eines einstimmigen Beschlusses des Professorenkollegiums erfolgte.

Mit großer Umsicht und Fachkenntnis leitete Magyar vom Studienjahr 1946/47 an vier Jahre lang als Dekan die Geschäfte der Fakultät für Maschinenwesen.

Magyar hat als begeisterter Lehrer eine seiner Hauptaufgaben darin gesehen, den Studierenden einen umfassenden Überblick über das weitläufige Fachgebiet der Strömungslehre und Gasdynamik zu geben; über sein eigenes Fachgebiet hinaus war es sein vornehmstes Ziel, die Studierenden unserer Hochschule mit einem möglichst universellen Wissen zu versehen. In diesem Sinne verhalf er auch mit unermüdlicher Energie einer neuen Studienordnung zum Durchbruch. Er war außerdem immer darauf bedacht, das hohe Niveau der Technischen Hochschule Wien und damit deren Ruf noch weiter zu heben und ihr den Charakter einer Universität zu verleihen. Er war deshalb auch ein eifriger Verfechter des Prinzips der Lehr- und Lernfreiheit.

Magyar hat neben seiner umfassenden Tätigkeit an der Hochschule als Lehrer und Forscher — 45 Originalarbeiten geben Zeugnis von seiner wissenschaftlichen Einfallskraft und Produktivität — noch Zeit für viele andere Aufgaben und für beratende Tätigkeit in der Industrie gefunden. Besondere Verdienste erwarb er sich beim Aufbau der österreichischen technischen Fachzeitschriften und als Schriftleiter dieser Zeitschrift.

Magyars Persönlichkeit wäre nicht voll gewürdigt, wollte man ihm nicht auch als Mensch jene Anerkennung zollen, die er als Wissenschaftler und Lehrer verdient hat: Bescheiden, liebenswürdig, vornehm, hilfsbereit und gerecht war er ein ruhender Pol in der manchmal hektischen Atmosphäre des Alltags. Daß er das sein konnte, war aber sicher auch dem Umstand zuzuschreiben, daß er in langjähriger, ungewöhnlich harmonischer und überaus glücklicher Ehe mit seiner Frau Gisela lebte, deren Fürsorge und opferbereite Hingabe während seiner schweren Erkrankung ihn das nahe Ende nicht ahnen ließ.

Die Krönung seines Berufslebens erfuhr Magyar durch die Wahl zum Rektor magnificus der Technischen Hochschule Wien für das Studienjahr 1957/58 und durch die Wahl zum wirklichen Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, die am 20. Mai 1958 erfolgte. Es mag allen seinen Freunden und Kollegen nur als geringer Trost erscheinen, daß Magyar auf dem Höhepunkt seiner Laufbahn von uns gegangen ist. Mit seinem Tod hat die Technische Hochschule Wien einen hervorragenden Lehrer, einen ausgezeichneten Fachgelehrten und verdienstvollen Forscher verloren. Seine Freunde und Kollegen betrauern einen edlen und aufrechten Menschen.

F. Schulz, Wien

(Mitteilung aus dem Institut für Einführung in die Stark- und Schwachstromtechnik, Wien)

Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld

Von H. Hofmann

Zweiter Teil

Stationäres Magnetfeld, nichtstationäres elektromagnetisches Feld

Mit 1 Textabbildung

Zusammenfassung. Im ersten Teil dieser Arbeit¹ wurde, nach einer allgemeinen Einführung, das Drehmoment im elektrostatischen Feld behandelt. Es folgen jetzt die analogen Untersuchungen im stationären Magnetfeld, und zwar sowohl im Sinne der „Theorie magnetischer Mengen“ als auch im Sinne der Elektronentheorie („Elementarstromtheorie“). Im allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feld tritt zu den Ausdrücken des stationären Feldes die zeitliche Änderung des elektromagnetischen Drehimpulses.

V.² Das direkte (körperfeste) Drehmoment im stationären Magnetfeld der „Theorie magnetischer Mengen“

A. Ansatz und Umwandlung in ein Volumsintegral

Nach der „Theorie magnetischer Mengen“ wird der Magnetismus der Materie auf magnetische Mengen zurückgeführt. Da es „wahre“ magnetische Mengen nach den bisherigen Feststellungen nicht gibt, sind die resultierenden „freien“ Magnetmengen ausschließlich Polarisationsmengen, die im Bereichsinneren mit der räumlichen Dichte

$$(19)^2 \quad \varrho'(\text{mgn}) = \text{div } \mathfrak{S} = -\text{div } \mathfrak{J} = \varrho_P^{(\text{mgn})}$$

und an der Bereichsgrenze mit der Flächendichte

$$(13) \quad \sigma_P^{(\text{mgn})} = \mathfrak{J} n$$

verteilt sind. (Vgl. Kap. II/C.) Während die Quellen des Magnetfeldes durch die magnetische Ladungsdichte Gl.(19) bestimmt sind, sind seine Wirbel mit der räumlichen Dichte der Leitungsströme verknüpft:

$$\frac{1}{c_0} \mathfrak{G} = \text{rot } \mathfrak{S}. \quad (92)$$

Im Bereich der „Theorie magnetischer Mengen“ ist dem Makrovektor \mathfrak{S} der Charakter der magnetischen Feldstärke zuzuschreiben (s.³, Abschn. 2), er ist also für den direkten Kraftangriff an den magnetischen Mengen und an den Leitungsströmen maßgebend, was nicht im Widerspruch steht zu der Tatsache, daß die ponderomotorische Kraft auf

¹ H. Hofmann: Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld, I. Teil. Österr. Ing.-Arch., Bd. XI, H. 4 (1957).

² Die Bezifferung der Kapitel und der Gleichungen schließt an den I. Teil dieser Arbeit an.

³ H. Hofmann: Über die Deutung der Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe elektrischer und magnetischer Mengen. Acta Physica Austriaca 11, H. 2 (1957).

einen stromdurchflossenen Leiter durch den Vektor \mathfrak{B} bestimmt ist (s.⁴, Kap. VIII, 3, 2). Das Drehmoment, mit dem das stationäre Magnetfeld direkt (körperfest) an einem Körper — also an einem „physikalisch“ begrenzten, körperlichen Materiebereich — angreift ist demnach

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V \mathbf{r} \times \left(\rho'^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} \right) dV + \oint_A \mathbf{r} \times \sigma_p^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} dA, \quad (93)$$

(Index M... „Theorie magnetischer Mengen“, kurz „Mengentheorie“). Führt man in Gl. (93) für die Dichten der Magnetmengen und der Leitungsströme die Zusammenhänge mit den entsprechenden Feldvektoren gemäß den vorhin angegebenen Gln. (19), (92) und (13) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) dV + \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{H} \mathbf{n}) \mathfrak{H} dA. \quad (94)$$

Es wird nun das direkte, körperfeste Drehmoment in ein Volumsintegral umgewandelt. Das erste Integral in Gl. (94) ist bereits ein Volumsintegral, so daß nur das zweite umgeformt werden muß:

$$\oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{H} \mathbf{n}) \mathfrak{H} dA = \oint_A (\mathbf{r} \times \mathfrak{H}) (\mathfrak{H} \mathbf{n}) dA. \quad (95)$$

Die weitere Umformung kann wegen der Analogie zum elektrischen Feld dem Rechengang Gl. (25) bis Gl. (28) entnommen werden, es tritt hier nur an die Stelle des Feldvektors \mathfrak{E} der Vektor \mathfrak{H} , an die Stelle des Polarisationsvektors \mathfrak{P} der Vektor \mathfrak{J} :

$$\begin{aligned} \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{H} \mathbf{n}) \mathfrak{H} dA &= \oint_A (\mathbf{r} \times \mathfrak{H}) (\mathfrak{H} \mathbf{n}) dA = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{J} dV + \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{J} \operatorname{grad} \mathfrak{H}) \mathfrak{H} dV - \int_V \mathfrak{H} \times \mathfrak{J} dV. \end{aligned} \quad (96)$$

Führt man dieses Resultat in Gl. (94) ein, so erhält man

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V (\mathbf{r} \times \mathfrak{H}) \operatorname{div} (\mathfrak{H} + \mathfrak{J}) dV + \int_V \mathbf{r} \times \{ (\mathfrak{J} \operatorname{grad} \mathfrak{H}) \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} dV. \quad (97)$$

Nun ist einerseits

$$\operatorname{div} (\mathfrak{H} + \mathfrak{J}) = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad (98)$$

andererseits bedeutet

$$(\mathfrak{J} \operatorname{grad} \mathfrak{H}) \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} = (\mathfrak{J} \operatorname{grad} \mathfrak{H}) \mathfrak{H} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \tilde{\mathfrak{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} \quad (99)$$

[s.⁵, Gln. (69) bis (72)] die Kraftdichte, mit der das Magnetfeld nach der „Mengentheorie“ an einem magnetisierten und von Leistungsströmen durchflossenen Körper direkt angreift. Dabei gilt für den Tensor $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})}$

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \mathbf{I} = \mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{J} \mathfrak{H}) \mathbf{I}. \quad (100)$$

Aus den Gln. (97), (98) und (99) folgt schließlich

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V \{ \mathbf{r} \times \tilde{\mathfrak{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \} dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{M})}) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \} dV. \quad (101)$$

⁴ H. Hofmann: Über den Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ing.-Arch. 10, H. 4 (1956).

⁵ S. Fußnote 4, S. 4.

Das mit Hilfe der Feldvektoren ausgedrückte Resultat stimmt wieder völlig mit dem des elektrischen Feldes Gl. (32) überein, obwohl zwischen beiden Feldern gewisse Unterschiede bestehen: Im Magnetfeld gibt es keine „wahren“ Mengen, andererseits tritt zusätzlich eine Kraft auf (elektrische) Leitungsströme auf; trotzdem kann Gl. (32) unmittelbar in Gl. (101) übergeführt werden, es muß wieder nur \mathfrak{E} durch \mathfrak{H} , \mathfrak{D} durch \mathfrak{B} und \mathfrak{P} durch \mathfrak{J} , und zwar auch im Tensor $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$, ersetzt werden.

Ebenso läßt sich die Momentendichte

$$\mathbf{t}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \quad (102)$$

zwanglos als Summe des Momentes der resultierenden Volumskräfte und der Momentendichte der Kräftepaare deuten, die an den polarisierten, körperlichen („physikalisch“ begrenzten) Volumselementen der Materie direkt angreifen. So wie im elektrischen Feld erfassen die Volumskräfte $\mathbf{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})}$ Gl. (99) — abgesehen von den Kräften auf die ausschließlich räumlich verteilten Leitungsströme — nur die auf die magnetischen Doppelschichten einwirkenden resultierenden Kräfte, so daß beim Drehmoment wieder der zusätzliche Summand $\mathfrak{J} \times \mathfrak{H}$, die Momentendichte der Kräftepaare, hinzutreten muß.

Man könnte auch von einem polarisierten Volumselement (Dipol) ausgehend die Gültigkeit der Momentendichte Gl. (102) nachweisen, doch kann wegen der Analogie zum elektrischen Feld, wo der entsprechende Nachweis bereits erbracht wurde [Gln. (42) bis (44)], auf die nochmalige Ableitung verzichtet werden.

B. Umwandlung in ein Oberflächenintegral

Das direkte Drehmoment, dessen Ansatz durch Gl. (93) gegeben ist, läßt sich auch in ein Oberflächenintegral umwandeln, wobei man am besten gleich vom veränderten Ansatz der Gl. (94) ausgeht:

$$(94) \quad \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) dV + \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{J} \mathbf{n}) \mathfrak{H} dA.$$

Da das zweite Integral bereits ein Oberflächenintegral ist, muß nur mehr das erste weiter behandelt werden. Man führt hiezu zunächst die folgende Umformung durch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} &= \mathfrak{H} (\nabla \mathfrak{H}) - \mathfrak{H} \times (\nabla \times \mathfrak{H}) = \mathfrak{H} (\nabla \mathfrak{H}) - \nabla (\mathfrak{H} \mathfrak{H}_e) + (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H} = \nabla (\mathfrak{H}; \mathfrak{H}) - \\ &- \nabla (\mathfrak{H} \mathfrak{H}_e) = \nabla (\mathfrak{H}; \mathfrak{H}) - \nabla \frac{\mathfrak{H}^2}{2} = \nabla (\mathfrak{H}; \mathfrak{H}) - \nabla \frac{\mathfrak{H}^2}{2} \mathbf{I} = \nabla \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \mathbf{I} \right) = \nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{M})}. \end{aligned} \quad (103)$$

Für den symmetrischen Tensor $\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})}$ [s. auch ⁶, Gl. (66)] gilt also

$$\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})} = \mathfrak{H}; \mathfrak{H} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{M})}. \quad (104)$$

Aus Gl. (94) folgt mit Gl. (103)

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} + \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{M})}) dV + \oint_A \mathbf{r} \times (\mathfrak{J} \mathbf{n}) \mathfrak{H} dA. \quad (105)$$

Wegen der Symmetrie des Tensors $\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})}$ läßt sich die folgende einfache Umwandlung durchführen [s. die Gln. (52) bis (56) und die Anmerkung zu Gl. (56)]:

$$\int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{M})}) dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})} \mathbf{n}) dA. \quad (106)$$

⁶ S. Fußnote 4, S. 4.

Aus Gl. (105) folgt mit den Gln. (106) und (104) weiterhin

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{M})} \mathbf{n} + (\mathfrak{S}; \mathfrak{S}) \mathbf{n} \right\} dA = \\ &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{S}; \mathfrak{S} + \mathfrak{S}; \mathfrak{S} - \frac{1}{2} \mathfrak{S}^2 \mathbf{1} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{S}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{S}^2 \mathbf{1} \right) \mathbf{n} \right\} dA. \quad (107)\end{aligned}$$

Der Tensor in der letzten Form von Gl. (107) ist der für „physikalische“ Bereichs-abgrenzung gültige Spannungstensor $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})}$ der Mengentheorie Gl. (100), so daß man unter Verwendung von

$$\mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} \mathbf{n} \quad (108)$$

wieder auf die auch im elektrischen Feld gültige Form

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} \mathbf{n}) dA = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} dA \quad (109)$$

gelangt. Drückt man also die am Körper direkt angreifenden Kräfte durch ein System von Spannungen $\mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{M})}$ [Gl. (108)] aus, so ist das direkte, körperfeste Drehmoment wieder einfach das Moment dieser Spannungen.

VI. Das direkte (körperfeste) Drehmoment im stationären Magnetfeld der „Elementarstromtheorie“

A. Ansatz und Umwandlung in ein Volumsintegral

Vom Standpunkt der Elektronentheorie aus gibt es keine magnetischen Mengen, weder „wahre“ noch Polarisationsmengen. Der Magnetismus der Materie wird auf stationäre Elementarströme zurückgeführt, die im Inneren der Materie räumlich mit der Dichte

$$(20) \quad \mathfrak{G}^{(\text{E})} = c_0 \text{rot } \mathfrak{S}$$

(Index $E \dots$ „Elementarstromtheorie“, Elektronentheorie) und an der Grenze zum benachbarten Materiebereich mit der flächenhaften Dichte

$$(21) \quad \mathfrak{j}^{(\text{E})} = c_0 \mathfrak{S} \times \mathbf{n}$$

verteilt sind (vgl. Kap. II/C). Im Gegensatz zur „Mengentheorie“ liegt jetzt eine „Elementarstromtheorie“ des Magnetismus vor, wobei im Rahmen dieser Theorie die Bedeutung der Feldstärke des magnetischen Makrofeldes die Größe \mathfrak{B} übernimmt (s. 7, Abschn. 1). Aus den Gln. (92) und (20) folgt einerseits, daß die Wirbel des magnetischen Feldvektors \mathfrak{B} mit der resultierenden („freien“) Stromdichte verknüpft sind

$$\frac{1}{c_0} (\mathfrak{G} + \mathfrak{G}^{(\text{E})}) = \text{rot } \mathfrak{S} + \text{rot } \mathfrak{S} = \text{rot } \mathfrak{B}, \quad (110)$$

andererseits ist das Magnetfeld der „Elementarstromtheorie“ mangels magnetischer Mengen quellenfrei:

$$(98) \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0.$$

Für das Drehmoment der an den Leitungs- und Magnetisierungsströmen eines körperlichen („physikalisch“ begrenzten) Materiebereiches direkt angreifenden Kräfte ergibt sich der Ansatz

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \int_V \mathbf{r} \times \frac{1}{c_0} \{ (\mathfrak{G} + \mathfrak{G}^{(\text{E})}) \times \mathfrak{B} \} dV + \oint_A \mathbf{r} \times \frac{1}{c_0} (\mathfrak{j}^{(\text{E})} \times \mathfrak{B}) dA. \quad (111)$$

⁷ S. Fußnote 3, S. 3.

Drückt man die Dichten \mathfrak{G} , $\mathfrak{G}^{(E)}$ und $\mathfrak{j}^{(E)}$ durch die Vektorgrößen \mathfrak{B} und \mathfrak{J} entsprechend den Gln. (110) und (21) aus, so erhält man aus Gl. (111)

$$\mathfrak{I}_{(ph)}^{(E)} = \int_V \mathbf{r} \times (\text{rot } \mathfrak{B} + \mathfrak{B}) dV + \oint_A \mathbf{r} \times \{ \mathfrak{J} \times \mathbf{n} \} \times \mathfrak{B} dA. \quad (112)$$

Zur Umwandlung von $\mathfrak{I}_{(ph)}^{(E)}$ in ein Volumsintegral muß zunächst nur das zweite Integral in Gl. (112) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes Gl. (53) weiter behandelt werden:

$$\oint_A \mathbf{r} \times \{ (\mathfrak{J} \times \mathbf{n}) \times \mathfrak{B} \} dA = \oint_A dA \{ (\mathbf{n} \times \mathfrak{J}) \times \mathfrak{B} \} \times \mathbf{r} = \int_V dV \{ (\nabla \times \mathfrak{J}) \times \mathfrak{B} \} \times \mathbf{r}. \quad (113)$$

Durch Anwendung der Produktenregel der Differentialrechnung und unter Berücksichtigung der Gln. (98), (79) und (27) erhält man ferner

$$\begin{aligned} \oint_A \mathbf{r} \times \{ (\mathfrak{J} \times \mathbf{n}) \times \mathfrak{B} \} dA &= - \int_V \mathbf{r} \times \{ (\nabla \times \mathfrak{J}) \times \mathfrak{B} \} dV + \int_V \{ \mathfrak{B} \times (\mathfrak{J} \times \nabla) \} \times \mathbf{r} dV = \\ &= - \int_V \mathbf{r} \times \{ \text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \} dV - \int_V \mathbf{r} \times \{ \mathfrak{J} \text{div } \mathfrak{B} - \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) \} dV + \int_V \{ \mathfrak{J} (\mathfrak{B} \nabla) \times \mathbf{r} - (\mathfrak{B} \mathfrak{J}) \nabla \times \mathbf{r} \} dV = \\ &= \int_V \mathbf{r} \times \{ - \text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) \} dV + \int_V \mathfrak{J} \times (\mathfrak{B} \nabla) \mathbf{r} dV = \int_V \mathbf{r} \times \{ - \text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} + \\ &+ \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) \} dV + \int_V \mathfrak{J} \times \{ \mathfrak{B} (\nabla \cdot \mathbf{r}) \} dV = \int_V \mathbf{r} \times \{ - \text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) \} dV + \\ &+ \int_V \mathfrak{J} \times (\mathfrak{B} \mathbf{I}) dV = \int_V \mathbf{r} \times \{ - \text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) \} dV + \int_V \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} dV. \end{aligned} \quad (114)$$

Führt man das Resultat Gl. (114) in Gl. (112) ein, so folgt

$$\mathfrak{I}_{(ph)}^{(E)} = \int_V \mathbf{r} \times \{ \text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) \} dV + \int_V \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} dV. \quad (115)$$

Das erste Integral in Gl. (115) bedeutet die Summe der Momente der an den einzelnen körperlichen („physikalisch“ begrenzten) Volumselementen direkt angreifenden (resultierenden) Kräfte. Die Dichte dieser Kräfte wurde bereits in ⁸ abgeleitet

$$\text{rot } \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) = \nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(ph)}^{(E)} = \text{div } \mathbf{T}_{(ph)}^{(E)} = \mathbf{f}_{(ph)}^{(E)}, \quad (116)$$

wobei der Tensor $\mathbf{T}_{(ph)}^{(E)}$ die Gestalt

$$\mathbf{T}_{(ph)}^{(E)} = \mathfrak{J} \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{J}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{J} \mathfrak{B}) \mathbf{I} \quad (117)$$

besitzt. Man erhält somit für das direkte (körperfeste) Drehmoment der „Elementarstromtheorie“

$$\mathfrak{I}_{(ph)}^{(E)} = \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{(ph)}^{(E)} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \} dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(ph)}^{(E)}) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \} dV, \quad (118)$$

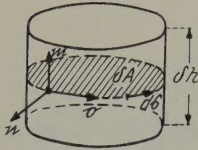
also ein Resultat, das zu dem des elektrischen Feldes und dem des magnetischen Feldes der „Mengentheorie“ analog ist: Die Momentendichte

$$\mathbf{t}_{(ph)}^{(E)} = \frac{d\mathfrak{I}_{(ph)}^{(E)}}{dV} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{(ph)}^{(E)} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \quad (119)$$

⁸ H. Hofmann: Über den Kraftangriff des Magnetfeldes an Elementarströmen. Österr. Ing.-Arch. 11, H. 1 (1957).

setzt sich wieder aus dem Moment der (resultierenden!) Volumskräfte und der Momentendichte $\mathfrak{J} \times \mathfrak{B}$ der an den polarisierten Volumselementen angreifenden Kräftepaare zusammen. Die Tatsache, daß in der Momentendichte der Kräftepaare jetzt der Vektor \mathfrak{B} auftritt, während der analoge Ausdruck der „Mengentheorie“ $\mathfrak{J} \times \mathfrak{S}$ den Vektor \mathfrak{S} enthält, ist völlig sinngemäß und war zu erwarten, da im Bereich der „Elementarstromtheorie“ dem Vektor \mathfrak{B} die Bedeutung der Makrofeldstärke des Magnetfeldes zukommt.

Im Bereich der „Elementarstromtheorie“ ist ein magnetisch polarisiertes Volumselement durch einen Wirbelring darzustellen und es soll jetzt die Gültigkeit der Momentendichte Gl. (119) auch noch vom Moment der auf einen solchen Wirbelring ausgeübten Kräfte ausgehend nachgewiesen werden:

Abb. 7⁹

Das Charakteristische eines Wirbelringes ist die örtliche Konstanz der Stromstärke seines in sich geschlossenen Stromes, der etwa an der Mantelfläche eines Volumselements, also in einem eng begrenzten Gebiet eines im allgemeinen Fall örtlich veränderlichen Feldes \mathfrak{B} , fließt. Stromdichte $j^{(E)}$ und Polarisationsvektor \mathfrak{J} sind also im Gegensatz zum Feldvektor \mathfrak{B} für den Bereich des Wirbelringes örtlich konstant. (Die analogen Verhältnisse gelten für den dualen Fall der Doppelschicht.)

Auf ein Flächenelement der Mantelfläche $\delta h \cdot \delta s$ wirkt eine Kraft

$$d\mathfrak{F}_{(ph)}^{(E)} = \frac{1}{c_0} j^{(E)} \times \mathfrak{B} \delta h \delta s = (\mathfrak{J} \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{B} \delta h \delta s. \quad (120)$$

Das Moment dieser Kraft ist dann bei $\mathfrak{J} = J\mathfrak{m}$

$$d\mathfrak{L}_{(ph)}^{(E)} = \mathbf{r} \times \{(\mathfrak{J} \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{B}\} \delta h \delta s = \mathbf{r} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}) J \delta h \delta s, \quad (121)$$

woraus das Drehmoment für den Wirbelring ($d\mathfrak{s} = ds \cdot \mathfrak{v}$)

$$\delta\mathfrak{L}_{(ph)}^{(E)} = J \delta h \oint_S \mathbf{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{B}) = -J \delta h \oint_S (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{B}) \times \mathbf{r} \quad (122)$$

folgt. Mit Hilfe des Stokeschen Satzes als Operatorenregel

$$\oint_S d\mathfrak{s} = \int_A d\mathfrak{A} \times \nabla \quad (123)$$

erhält man weiterhin

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{L}_{(ph)}^{(E)} = & -J \delta h \int_{\delta A} \{ (d\mathfrak{A} \times \nabla) \times \mathfrak{B} \} \times \mathbf{r} = J \delta h \int_{\delta A} \mathbf{r} \times \{ (d\mathfrak{A} \times \nabla) \times \mathfrak{B} \} + \\ & + J \delta h \int_{\delta A} \{ \mathfrak{B} \times (d\mathfrak{A} \times \nabla) \} \times \mathbf{r} = J \delta h \int_{\delta A} \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{B} d\mathfrak{A}) - J \delta h \int_{\delta A} \mathbf{r} \times (\nabla \mathfrak{B}) d\mathfrak{A} + \\ & + J \delta h \int_{\delta A} d\mathfrak{A} (\mathfrak{B} \nabla) \times \mathbf{r} - J \delta h \int_{\delta A} (\mathfrak{B} d\mathfrak{A}) \nabla \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (124)$$

Auf Grund der Gln. (98) und (79) verschwinden zwei Integrale und es wird, da einerseits wegen $d\mathfrak{s} = ds \cdot \mathfrak{v}$ die Zuordnung $d\mathfrak{A} = dA \cdot \mathfrak{m}$ ($\uparrow \mathfrak{J}$) und andererseits $\delta h \cdot dA = dV$ gilt,

$$\delta\mathfrak{L}_{(ph)}^{(E)} = \int_{\delta V} \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{B} \mathfrak{J}_c) dV + \int_{\delta V} \mathfrak{J} \times (\mathfrak{B} \nabla) \mathbf{r} dV = \int_{\delta V} \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{J}_c \mathfrak{B}) dV + \int_{\delta V} \mathfrak{J} \times \{ \mathfrak{B} (\nabla \cdot \mathbf{r}) \} dV. \quad (125)$$

⁹ Die Bezifferung der Abbildungen schließt an den I. Teil der Arbeit an.

Berücksichtigt man ferner

$$\mathfrak{B}(\nabla; \mathbf{r}) = \mathfrak{B} I = \mathfrak{B}, \quad (126)$$

so erhält man aus Gl. (125)

$$\delta \mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \int_{\delta V} \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{L} \mathfrak{B}) dV + \int_{\delta V} \mathfrak{L} \times \mathfrak{B} dV \quad (127)$$

und als Momentendichte

$$\mathbf{t}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{L} \mathfrak{B}) + \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}. \quad (128)$$

Wie erwähnt, ist der erste Summand das Moment der schon in ¹⁰ abgeleiteten, an einem Wirbelring angreifenden resultierenden Kraftdichte, der zweite bedeutet eine Momentendichte von Kräften, die zur Resultierenden nichts beitragen, es ist also die Momentendichte der an dem Wirbelring angreifenden Kräftepaare. Summiert man hierzu noch die Momentendichte der auf die Leitungsströme ausgeübten Kräfte, so folgt in völliger Übereinstimmung mit den Gln. (119) und (116)

$$\mathbf{t}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathbf{r} \times \left\{ \frac{1}{c_0} \mathfrak{L} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{L} \mathfrak{B}) \right\} + \mathfrak{L} \times \mathfrak{B} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} + \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}. \quad (129)$$

B. Umwandlung in ein Oberflächenintegral

Soll das Drehmoment $\mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{E})}$, dessen Ansatz durch Gl. (111) gegeben ist, allein durch ein Oberflächenintegral dargestellt werden, so geht man am besten von Gl. (112) aus, in der die Mengengrößen bereits durch die Feldvektoren ausgedrückt sind:

$$(112) \quad \mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \int_V \mathbf{r} \times (\text{rot } \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) dV + \oint_A \mathbf{r} \times \{ (\mathfrak{L} \times \mathbf{n}) \times \mathfrak{B} \} dA.$$

Es muß jetzt der erste Summand in ein Oberflächenintegral umgeformt werden. Zu diesem Zweck wird zunächst der Ausdruck $\text{rot } \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, unter Verwendung auch von Gl. (98), weiter behandelt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} &= -\mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) = -\nabla (\mathfrak{B} \mathfrak{B}_c) + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} = (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{B} (\nabla \mathfrak{B}) - \nabla (\mathfrak{B} \mathfrak{B}_c) = \\ &= \nabla (\mathfrak{B}; \mathfrak{B}) - \frac{1}{2} \nabla \mathfrak{B}^2 = \nabla (\mathfrak{B}; \mathfrak{B}) - \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 \mathbf{I} = \nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{E})}. \end{aligned} \quad (130)$$

Der symmetrische Tensor $\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{E})}$ [s. auch ¹¹, Gl. (79)]

$$\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{E})} = \mathfrak{B}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{E})} \quad (131)$$

erlaubt wieder die einfache Umformung [vgl. die Gln. (52) bis (56) und die Anmerkung zu Gl. (56)]:

$$\int_V \mathbf{r} \times (\text{rot } \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) dV = \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{m})}^{(\text{E})}) dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{E})} \mathbf{n}) dA. \quad (132)$$

¹⁰ S. Fußnote 8, S. 7.

¹¹ S. Fußnote 4, S. 4.

Aus den Gln. (112) und (132) folgt

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} &= \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{m})}^{(\text{E})} \mathbf{n}) dA + \oint_A \mathbf{r} \times \{(\mathfrak{S} \times \mathbf{n}) \times \mathfrak{B}\} dA = \\
 &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{B}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA + \oint_A \mathbf{r} \times \{(\mathfrak{S} \mathfrak{B}) \mathbf{n} - \mathfrak{S} (\mathfrak{B} \mathbf{n})\} dA = \\
 &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{B}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{S}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{S} \mathfrak{B}) \mathbf{I} - \mathfrak{S}; \mathfrak{B} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \\
 &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{S}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{S}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{S} \mathfrak{B}) \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA. \tag{133}
 \end{aligned}$$

Der Tensor in der letzten Form von Gl. (133) ist nun der für „physikalisch“ begrenzte (körperliche) Materiebereiche gültige Spannungstensor der „Elementarstromtheorie“ Gl. (117), so daß in völliger Analogie zum elektrischen Feld und zum magnetischen Feld der „Mengentheorie“

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} \mathbf{n}) dA = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} dA \tag{134}$$

mit

$$\mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} \mathbf{n} \tag{135}$$

folgt. Das Drehmoment ist also wiederum entweder direkt durch das Moment der Spannungen entsprechend Gl. (134) oder aber durch das Moment der (resultierenden) Volumskräfte zuzüglich der Momentendichte der an den polarisierten Volumselementen (Wirbelringen) angreifenden Kräftepaare gemäß Gl. (118) zu berechnen.

VII. Der Spezialfall der Isotropie. Zusammenfassende Bemerkungen über das direkte (körperfeste) Drehmoment im stationären Magnetfeld

A. Der Spezialfall der Isotropie

Bei isotropem Material, wenn also

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{S} \tag{136}$$

und

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B} - \mathfrak{S} = (\mu - 1) \mathfrak{S} = \kappa \mathfrak{S} = \frac{\mu - 1}{\mu} \mathfrak{B}, \tag{137}$$

($\mu \dots$ Permeabilität, $\kappa \dots$ magnetische Suszeptibilität) gilt, werden die Spannungstensoren der „Mengen“- und der „Elementarstromtheorie“ symmetrisch

$$(100), (136) \quad \mathbf{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{M})} = \mu \mathfrak{S}; \mathfrak{S} - \frac{1}{2} \mathfrak{S}^2 \mathbf{I}, \tag{138}$$

$$(117), (136) \quad \mathbf{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{E})} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \left(\frac{2 - \mu}{\mu} \right) \mathfrak{B}^2 \mathbf{I}. \tag{139}$$

Die Symmetrie der Tensoren bewirkt, daß das Moment der Volumskräfte allein bereits dem Moment der Oberflächenkräfte (Spannungen) äquivalent ist, d. h. es gilt die einfache Umformung

$$\begin{aligned}
 \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} dV &= \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})}) dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} \mathbf{n}) dA = \\
 &= \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{(\text{ph}) \text{ isotr.}}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} dA \tag{140}
 \end{aligned}$$

[vgl. die Erläuterungen zu Gl. (56)]. Tatsächlich verschwindet auch die Momentendichte der Kräftepaare im Falle der Proportionalität von \mathfrak{J} und \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{J} und \mathfrak{B} in den entsprechenden Gln. (101) und (118) wegen

$$\mathfrak{J} \times \mathfrak{H} = (\mu - 1) \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} = 0, \quad (141)$$

bzw.

$$\mathfrak{J} \times \mathfrak{B} = \frac{\mu - 1}{\mu} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} = 0. \quad (142)$$

B. Zusammenfassende Bemerkungen über das direkte (körperfeste) Drehmoment im stationären Magnetfeld

Die Untersuchungen über das direkte Drehmoment im stationären Magnetfeld brachten — in analoger Weise wie im elektrischen Feld — das folgende Ergebnis:

Das Feld übt auf einen magnetisierten und von Leitungsströmen durchflossenen Körper direkt (in seinem Inneren) Kräfte aus. Bei ihrer Berechnung ist die Tatsache zu berücksichtigen, daß zur richtigen Erfassung aller Mengen und Ströme des Körpers dieser vom benachbarten Materiebereich „physikalisch“ zu trennen ist. Man erhält dann als direkte Kraftdichte nach der „Mengen“- bzw. nach der „Elementarstromtheorie“

$$(99) \text{ bzw. } (116) \quad \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} = \nabla \tilde{\mathbf{T}}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})}, \quad (143)$$

(vgl. ¹², Abschn. VI und VIII). Die direkte Kraft des Feldes auf den Körper läßt sich aber auch als Resultierende eines äquivalenten, über die Oberfläche zu integrierenden Systems von Spannungen

$$(108) \text{ bzw. } (135) \quad \mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} \mathbf{n} \quad (144)$$

(vgl. ¹³, Abschn. VI und VIII) ausdrücken.

Das direkte Drehmoment ist bei Darstellung mit Hilfe der Volumskräfte durch

$$(101) \quad \mathfrak{D}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \} dV,$$

bzw. (118)

$$\mathfrak{D}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \int_V \{ \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \} dV$$

gegeben. Es tritt also wegen der Tatsache, daß die Volumskräfte bereits resultierende Kräfte bezüglich der einzelnen in sich polarisierten Volumselemente darstellen, zu deren Moment noch die Momentendichte der an den Volumselementen angreifenden Kräftepaare hinzu. Diese ist durch das vektorielle Produkt aus dem Polarisationsvektor \mathfrak{J} und dem Feldvektor der betreffenden Theorie (\mathfrak{H} bei der „Mengen“- bzw. \mathfrak{B} bei der „Elementarstromtheorie“) gegeben.

Bei der Darstellung mit Hilfe des äquivalenten Spannungssystems hingegen ist das direkte Drehmoment einfach das resultierende Moment dieser Spannungen:

$$(109) \text{ bzw. } (134) \quad \mathfrak{D}_{(\text{ph})}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} = \oint_A \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{(\text{ph})}^{(\text{M}) \text{ od. } (\text{E})} dA. \quad (145)$$

¹² S. Fußnote 4, S. 4.

¹³ S. Fußnote 4, S. 4.

VIII. Das ponderomotorische Drehmoment im stationären Magnetfeld

Die „Mengen“- und die „Elementarstromtheorie“ werden in diesem Kapitel jeweils parallel behandelt. Beide Theorien führen in den Fällen, in denen die Anwendung der Maxwell'schen Ausdrücke gestattet ist, sowohl untereinander als auch bei Vergleich mit der Maxwell'schen Theorie zu übereinstimmenden Resultaten. Zu diesen Fällen zählen jedenfalls der von homogener, isotroper, leitungsfreier Materie und der von Vakuum umgebene Körper. Das ponderomotorische Drehmoment setzt sich nun bekanntlich aus dem Drehmoment der am Körper direkt angreifenden (körperfesten) Kräfte und dem Moment der auf seine Oberfläche von der umgebenden Materie ausgeübten Auftriebskräfte zusammen. Diese Auftriebskräfte entstehen durch den (direkten) Kraftangriff des Feldes an der umgebenden Materie. Es muß also

$$(72) \quad \mathfrak{T}_{\text{pond}} = \mathfrak{T}_{(\text{ph})} + \mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}$$

gelten. Die Ausdrücke für das direkte Drehmoment $\mathfrak{T}_{(\text{ph})}$ wurden bereits in den vorhergehenden Kapiteln abgeleitet, so daß nur noch das Moment $\mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}$ der Auftriebskräfte zu berechnen ist.

Die Kraftdichte der „Mengentheorie“ Gl. (99) läßt sich für den Fall isotroper Materie mit Hilfe der Gl. (137) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{J} + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \text{rot } \mathfrak{H} \times \mathfrak{J} + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H}) + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H}) = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + (\mu - 1) \nabla (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}) = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + (\mu - 1) \nabla \frac{\mathfrak{H}^2}{2} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla \frac{(\mu - 1) \mathfrak{H}^2}{2} - \frac{\mathfrak{H}^2}{2} \nabla (\mu - 1) = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{H}^2}{2} \nabla \mu + \nabla \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H})}{2}. \end{aligned} \quad (146)$$

Die letzte Form von Gl. (146) läßt erkennen, daß das stationäre Magnetfeld der „Mengentheorie“ auf die den betrachteten Körper umgebende, homogene ($\mu = \text{const.}$) und leitungsfreie ($\mathfrak{G} = 0$) Materie mit einer Kraftdichte

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \nabla \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H})}{2} = \text{grad } \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H})}{2} \quad (147)$$

einwirkt.

Auch die Kraftdichte der „Elementarstromtheorie“ Gl. (116) soll für isotrope Materie unter Verwendung der Gln. (136) und (137) in eine andere Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B}) = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \frac{\mu - 1}{\mu} \nabla (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}) = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \frac{\mu - 1}{\mu} \nabla \frac{\mathfrak{B}^2}{2} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{B}^2}{2} \nabla \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right) + \nabla \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\mathfrak{B}^2}{2} = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{B}^2}{2} \frac{\mu - \mu + 1}{\mu^2} \nabla \mu + \nabla \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B})}{2} = \\ &= \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{B}^2}{2} \nabla \mu + \nabla \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B})}{2}. \end{aligned} \quad (148)$$

In homogener ($\mu = \text{const.}$) leitungsfreier Materie ($\mathfrak{G} = 0$) wirkt also nach der „Elementarstromtheorie“ eine Kraftdichte

$$\mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \nabla \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B})}{2} = \text{grad } \frac{(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{B})}{2}. \quad (149)$$

Aus den Gln. (147) bzw. (149) folgt, daß für den mechanischen (hydrostatischen, aerostatischen) Druck p , der zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes in der den betrachteten Körper umgebenden Materie nötig ist, nach der „Mengentheorie“

$$p^{(M)} = \frac{1}{2} (\mathfrak{H}\mathfrak{H}) + C_1, \quad (150)$$

bzw. nach der „Elementarstromtheorie“

$$p^{(E)} = \frac{1}{2} (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + C_2 \quad (151)$$

gelten muß, [die Ableitung ist analog dem Rechengang im elektrischen Feld Gl. (73) bis Gl. (77)]. Unter Berücksichtigung von Gl. (80) erhält man somit für das Moment der Auftriebskräfte nach der „Mengentheorie“

$$\mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}^{(M)} = \oint_A \mathfrak{r} \times (-\mathfrak{n}) \frac{(\mathfrak{H}\mathfrak{H})}{2} dA, \quad (152)$$

nach der „Elementarstromtheorie“

$$\mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}^{(E)} = \oint_A \mathfrak{r} \times (-\mathfrak{n}) \frac{(\mathfrak{H}\mathfrak{B})}{2} dA. \quad (153)$$

Das ponderomotorische Drehmoment Gl. (72) wird dann nach der „Mengentheorie“ gemäß den Gln. (109), (100) und (152)

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(M)} = \oint_A \mathfrak{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H}\mathfrak{H}) \mathbf{I} \right) \mathfrak{n} \right\} dA = \oint_A \mathfrak{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}\mathfrak{H}) \mathbf{I} \right) \mathfrak{n} \right\} dA \quad (154)$$

und nach der „Elementarstromtheorie“ gemäß den Gln. (134), (117) und (153)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(E)} &= \oint_A \mathfrak{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}\mathfrak{H}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) \mathbf{I} \right) \mathfrak{n} \right\} dA = \\ &= \oint_A \mathfrak{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}\mathfrak{H}) \mathbf{I} \right) \mathfrak{n} \right\} dA. \end{aligned} \quad (155)$$

Das ponderomotorische Drehmoment beider Theorien ist also gleich und stimmt überdies mit dem Moment der Maxwellschen Spannungen überein, da der in den Gln. (154) und (155) enthaltene Tensor

$$\mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}\mathfrak{H}) \mathbf{I} \quad (156)$$

der klassische Maxwellsche Spannungstensor des magnetischen Feldes ist, die Spannungen

$$\mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} \mathfrak{n} \quad (157)$$

sind also die Maxwellschen Spannungen. Wie erwartet, liefern die Maxwellschen Spannungen wiederum wie im elektrischen Feld unmittelbar das ponderomotorische Drehmoment

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \oint_A \mathfrak{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}\mathfrak{H}) \mathbf{I} \right) \mathfrak{n} \right\} dA = \oint_A \mathfrak{r} \times (\mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} \mathfrak{n}) dA = \oint_A \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} dA. \quad (158)$$

Hingegen kann die Umwandlung des ponderomotorischen Drehmomentes aus dem Oberflächenintegral Gl. (158) in ein Volumsintegral wegen der Unsymmetrie des

Maxwellschen Spannungstensors Gl. (156) nicht auf das Moment der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte allein führen. Entsprechend der Umformung in den Gln. (52) und (54) gilt

$$\oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} \mathbf{n}) dA = \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})}) dV - \int_V (\mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} \nabla) \times \mathbf{r} dV. \quad (159)$$

Nun ist aber unter Berücksichtigung auch von Gl. (79)

$$\begin{aligned} -(\mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} \nabla) \times \mathbf{r} &= -\left\{ \left(\mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) \mathbf{I} \right) \nabla \right\} \times \mathbf{r} = -\mathfrak{H} (\mathfrak{B} \nabla) \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) (\mathbf{I} \nabla) \times \mathbf{r} = \\ &= -\mathfrak{H} \times (\mathfrak{B} \nabla) \mathbf{r} + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) \nabla \times \mathbf{r} = -\mathfrak{H} \times \{ \mathfrak{B} (\nabla; \mathbf{r}) \} = -\mathfrak{H} \times (\mathfrak{B} \mathbf{I}) = \\ &= -\mathfrak{H} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{H} = (\mathfrak{H} + \mathfrak{J}) \times \mathfrak{H} = \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{J} \times (\mathfrak{B} - \mathfrak{J}) = \mathfrak{J} \times \mathfrak{B}. \end{aligned} \quad (160)$$

Das ponderomotorische Drehmoment führt nach Umwandlung in ein Volumsintegral auf Grund der Gln. (159) und (160) und mit Hilfe der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte

$$\mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \text{div } \mathbf{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \nabla \tilde{\mathbf{T}}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} \quad (161)$$

auf

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} dV + \int_V \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} dV = \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} dV + \int_V \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} dV. \quad (162)$$

Das Zusatzglied zum Moment der ponderomotorischen Volumskräfte ist wieder durch die bei anisotroper Materie in Erscheinung tretende Momentendichte der Kräftepaare bestimmt, für die nach Gl. (160)

$$\mathfrak{J} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \quad (163)$$

gilt und die somit in zwei einander äquivalenten Formen geschrieben werden darf. Sie läßt sich sowohl im Sinne der „Mengentheorie“ (mit der Feldstärke \mathfrak{H}) als auch im Sinne der „Elementarstromtheorie“ (mit der Feldstärke \mathfrak{B}) deuten.

Die Übereinstimmung des nach der „Mengentheorie“ bzw. nach der „Elementarstromtheorie“ berechneten ponderomotorischen Drehmomentes mit dem (ponderomotorischen) Drehmoment der Maxwellschen Spannungen erweist sich in einfacher Weise auch bei einem von Vakuum umgebenen Körper: Es muß mangels an Auftriebskräften in diesem Fall

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}, 0}^{(\text{mgn})} = \mathfrak{T}_{(\text{ph}), 0}^{(\text{M}) \text{ od. (E)}} \quad (164)$$

gelten, was sich wegen der für Vakuum gültigen Bedingungen

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_0 \quad (165)$$

und

$$\mathfrak{J}_0 = 0 \quad (166)$$

an Hand der Oberflächenintegrale leicht zeigen läßt. Es folgt aus den Gln. (165), (166), (158) mit (156), (109) mit (100) und (134) mit (117) unmittelbar die geforderte Gleichheit

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\text{pond}, 0}^{(\text{mgn})} &= \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}_0; \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{H}_0) \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}_0; \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{2} \mathfrak{H}_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \\ &= \mathfrak{T}_{(\text{ph}), 0}^{(\text{M})} = \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \left(\mathfrak{H}_0; \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{H}_0) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{J}_0 \mathfrak{B}_0) \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \right\} dA = \mathfrak{T}_{(\text{ph}), 0}^{(\text{E})}. \end{aligned} \quad (167)$$

IX. Ergebnisse und Anwendungen

Mit den vorliegenden Untersuchungen erscheint nun die Frage, ob und in welcher Form die Maxwellschen ponderomotorischen Kräfte bei anisotroper Materie Gültigkeit besitzen, geklärt: Bei der Berechnung des bewegenden, ponderomotorischen Drehmomentes mit Hilfe der Maxwellschen Spannungen spielt die Anisotropie des betrachteten Körpers keine Rolle. Die Anwendung der Maxwellschen Spannungen ist also insbesondere auch bei dem in ¹⁴, ¹⁵ und an anderen Stellen behandelten Problem des von homogener, permeabler Flüssigkeit umgebenen permanent und reversibel magnetischen Körpers gestattet. Es stellt die Ableitbarkeit des ponderomotorischen Drehmomentes auch eines anisotropen Körpers aus einem Oberflächenintegral mit Hilfe eines Spannungstensors keine unbewiesene Annahme mehr dar (vgl. ¹⁵, Kap. I), auch ist eine gewaltsame Symmetrisierung des Maxwellschen Spannungstensors bei anisotroper Materie, wie dies in ¹⁴ vorgeschlagen wurde, nicht nötig; im Gegenteil, die Unsymmetrie sowohl des Maxwellschen als auch der für „physikalische“ Bereichsabgrenzung gültigen Spannungstensoren, die den direkten Kraftangriff des elektromagnetischen Feldes beschreiben, hat ihren Grund. Es ist dies die Polarität der Materie, die bei Anisotropie das Auftreten von Kräftepaaren bei den in sich polarisierten Volumselementen verursacht. Gerade wegen der Unsymmetrie der Spannungstensoren ergibt sich bei der Umwandlung des Drehmomentes in ein Volumsintegral die Momentendichte der Kräftepaare als das notwendige Zusatzglied zum Moment der (resultierenden) Volumskräfte. Dieser zusätzliche Ausdruck ist durch das Vektorprodukt von Polarisations- und Feldstärkevektor gegeben und tritt zum Beispiel beim permanenten Magneten, der sich im Vakuum in einem homogenen Fremdfeld befindet, als der allein wichtige Summand in Erscheinung. Es sind nämlich hier nur die Kräftepaare wirksam, da die an den polarisierten Volumselementen angreifende resultierende Kraftdichte des homogenen Fremdfeldes Null wird.

Dieser, bei Annahme eines ideal harten Magneten ($\mathfrak{J} = \text{const.}$, reversible Permeabilität gleich der Vakuumpermeabilität $= 1$) einfach zu behandelnde, für die Praxis aber wichtige Fall soll eingehender untersucht werden:

Zuerst wird die aus dem Maxwelltensor Gl. (156) abzuleitende ponderomotorische Kraftdichte Gl. (161) durch Vergleich mit den direkten Kraftdichten Gl. (99) mit Gl. (100) und Gl. (116) mit Gl. (117) in eine andere Form gebracht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} &= \nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{H})}{2} = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{H})}{2} = \nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{B})}{2} = \\ &= \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{B})}{2}. \end{aligned} \quad (168)$$

Unter nochmaliger Verwendung der Gln. (99) und (116) ergibt sich eine auch für anisotrope Materie gültige Form der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte (man kann sie auch direkt aus dem Impulssatz der Maxwelltheorie ableiten)

$$\mathfrak{f}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{H})}{2} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J} \mathfrak{B}) - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{B})}{2}. \quad (169)$$

Die ersten beiden Summanden in den beiden Formen der Gl. (169) stellen der Reihe nach die direkten Feldkräfte auf Leitungsströme und auf magnetisierte Materie dar, der dritte bedeutet den auf die Volumseinheit überwälzten Anteil der an der Oberfläche

¹⁴ A. Sommerfeld und F. Bopp: Zum Problem der Maxwellschen Spannungen. Ann. Phys. 8, H. 1–2 (1950).

¹⁵ W. Döring: Über die Kraft und das Drehmoment auf magnetisierte Körper im Magnetfeld. Ann. Phys. 9, H. 6–7 (1951).

des Körpers angreifenden Auftriebskräfte. Die erste Form von Gl. (169) ist dabei im Sinne der „Mengentheorie“, die zweite im Sinne der „Elementarstromtheorie“ zu deuten.

Für das ponderomotorische Drehmoment ergibt sich dann nach Gl. (162) und Gl. (169)

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} &= \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} - \nabla \frac{(\mathfrak{J} \mathfrak{H})}{2} \right) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \right\} dV = \\ &= \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J}_e \mathfrak{B}) - \nabla \frac{(\mathfrak{J}_e \mathfrak{B})}{2} \right) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \right\} dV. \quad (170)\end{aligned}$$

Der jeweils dritte Summand fällt bei dem von Vakuum umgebenen Körper wegen $\mathfrak{J}_0 = 0$ weg:

$$- \int_V \mathbf{r} \times \nabla \frac{(\mathfrak{J}_0 \mathfrak{H})}{2} dV = - \oint_A \mathbf{r} \times \frac{(\mathfrak{J}_0 \mathfrak{H}_0)}{2} \mathbf{n} dA = 0, \quad (171)$$

$$- \int_V \mathbf{r} \times \nabla \frac{(\mathfrak{J}_0 \mathfrak{B})}{2} dV = - \oint_A \mathbf{r} \times \frac{(\mathfrak{J}_0 \mathfrak{B}_0)}{2} \mathbf{n} dA = 0. \quad (172)$$

Auftriebskräfte sind in diesem Fall ja nicht vorhanden und es muß daher das ponderomotorische Drehmoment mit dem direkten Drehmoment gleich sein [s. auch Gl. (164)]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} &= \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} \right) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \right\} dV = \\ &= \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \nabla (\mathfrak{J}_e \mathfrak{B}) \right) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \right\} dV = \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})}. \quad (173)\end{aligned}$$

Die Glieder, die die Leitungsstromdichte enthalten, verschwinden beim Magneten ebenfalls, so daß für das ponderomotorische (= direkte) Drehmoment die der „Mengen“- bzw. der „Elementarstromtheorie“ entsprechenden Ausdrücke folgen:

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathfrak{J} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \} dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{J}_e \mathfrak{B}) + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \} dV. \quad (174)$$

Der im Vakuum befindliche Magnet werde nun von einem homogenen Fremdfeld (Index f)

$$\mathfrak{H}_f = \mathfrak{B}_f = \text{const.} \quad (175)$$

beeinflußt, das von magnetischen Mengen oder Strömen erzeugt wird, deren Verteilung durch den permanenten Magneten selbst nicht geändert wird. Das homogene Fremdfeld und das Eigenfeld (Index e) des Magneten beeinflussen sich nicht, die beiden Felder überlagern sich ungestört. Innerhalb und außerhalb des Magneten gilt also

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_f + \mathfrak{H}_e, \quad (176)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_f + \mathfrak{B}_e \quad (177)$$

und außerdem für das vom Magneten erfüllte Volumen

$$\mathfrak{B}_e = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{J}. \quad (178)$$

Das auf den Magneten einwirkende Drehmoment wird nach den Gln. (174), (176) und (177)

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} &= \int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathfrak{J} \nabla) (\mathfrak{H}_f + \mathfrak{H}_e) + \mathfrak{J} \times (\mathfrak{H}_f + \mathfrak{H}_e) \} dV = \\ &= \int_V \{ \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{J}_e (\mathfrak{B}_f + \mathfrak{B}_e)) + \mathfrak{J} \times (\mathfrak{B}_f + \mathfrak{B}_e) \} dV. \quad (179)\end{aligned}$$

Ohne Fremdfeld erfährt der Magnet kein Drehmoment, es gilt somit

$$\int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathfrak{F} \nabla) \mathfrak{H}_e + \mathfrak{F} \times \mathfrak{H}_e \} dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{F}_e \mathfrak{B}_e) + \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}_e \} dV = 0. \quad (180)$$

Das Eigenfeld allein kann natürlich kein Drehmoment verursachen, so daß das bewegende Drehmoment gemäß den Gln. (179) und (180) auch allein aus dem Fremdfeld berechnet werden kann:

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathfrak{F} \nabla) \mathfrak{H}_f + \mathfrak{F} \times \mathfrak{H}_f \} dV = \int_V \{ \mathbf{r} \times \nabla (\mathfrak{F}_f \mathfrak{B}_f) + \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}_f \} dV. \quad (181)$$

Da das Fremdfeld homogen ist [Gl. (175)], fällt schließlich noch der erste Summand der beiden Formen von Gl. (181) fort und man erkennt, daß tatsächlich die Kräftepaare allein für das Drehmoment verantwortlich sind,

$$\mathfrak{T}_{\text{pond}}^{(\text{mgn})} = \int_V \mathfrak{F} \times \mathfrak{H}_f dV = \int_V \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}_f dV, \quad (182)$$

während das Moment der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte [der erste Summand in Gl. (162)] in diesem Fall also keinen Beitrag leistet. In der Praxis wird das Drehmoment des von Vakuum umgebenen, im homogenen Fremdfeld befindlichen Magneten stets nach Gl. (182) berechnet, wobei man die auf der Vorstellung magnetischer Mengen fußende Form mit dem Feldvektor \mathfrak{H} häufiger verwendet. Allerdings war der hier aufgezeigte allgemeine Zusammenhang mit den Maxwellschen Ausdrücken bislang nicht bekannt, sondern es wurde Gl. (182) auf elementare Weise aus dem Moment der Kräfte abgeleitet, die das Fremdfeld auf die magnetischen Mengen des permanenten Magneten direkt ausübt. Es ist jedoch bezeichnend für die Unklarheiten, die bei der Berechnung des Drehmomentes auf magnetisierte Körper bestanden haben, daß die nur für homogenes Fremdfeld gültige Formel $\int_V \mathfrak{F} \times \mathfrak{H}_f dV$ fälschlicherweise auch im

inhomogenen Feld verwendet wurde (s. ¹⁶). Die zitierten Autoren gehen dabei vom direkten Kraftangriff des Fremdfeldes \mathfrak{H}_f an den einzelnen „Elementarmagneten vom Moment $\mathfrak{H} dV$ “ aus, berücksichtigen aber im Gegensatz zu der am Ende des Kap. V/A erwähnten und für den analogen Fall des elektrischen Feldes in Kap. III/A [Gln. (42) bis (44)] durchgeführten Ableitung des Drehmomentes die Inhomogenität des Fremdfeldes nicht!

Der Zweck des Beispiels im Rahmen dieser Arbeit war also, den Zusammenhang der in diesem wichtigen Fall bisher angewendeten elementaren Rechenweise mit dem Moment der Maxwellschen Spannungen Gl. (158) aufzuzeigen, der über den Weg des als Volumsintegral angeschriebenen ponderomotorischen Drehmomentes Gl. (162) gewonnen wird. Der Nachweis der Gültigkeit des Momentes der Maxwellschen Spannungen auch bei anisotroper Materie bzw. die Ableitung des Volumsintegrals für das ponderomotorische Drehmoment mit dem Zusatzglied der Kräftepaare zum Moment der Maxwellschen ponderomotorischen Volumskräfte läßt jetzt auch die Berechnung des bewegenden Drehmomentes beliebig magnetisierter Körper, die von homogener Materie umgeben sind, zu. Solche allgemeinere Fälle lassen sich natürlich nicht mehr auf elementarem Wege behandeln, sondern es muß die Feldverteilung von \mathfrak{H} und \mathfrak{B} bestimmt und das Drehmoment durch Lösung des betreffenden Integrals gefunden werden.

¹⁶ F. Halla und L. Castelliz: Drehmoment einer homogen magnetisierten Kugel in einem Magnetfeld. Österr. Ing.-Arch. 1, H. 3 (1946).

Schließlich sei noch erwähnt, daß in jenen Fällen, in denen die Maxwell'schen Ausdrücke zur Berechnung nicht mehr herangezogen werden dürfen (s. ¹⁷, Kap. I und VIII/1), die Berechnung des bewegenden Drehmomentes allgemein nach Gl. (72)

$$(72) \quad \mathfrak{T}_{\text{pond}} = \mathfrak{T}_{(\text{ph})} + \mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}$$

zu erfolgen hat. Es sind dies alle Fälle, in denen sich der betrachtete Körper nicht mehr unabhängig von der umgebenden Materie verschieben läßt und in denen dann die bei einer virtuellen Verschiebung umgesetzte Feldenergie nicht mehr in ein Integral über den betrachteten Körper allein umgewandelt werden kann. Es sind dann die Auftriebsspannungen wiederum aus den an der umgebenden Materie direkt angreifenden Feldkräften zu berechnen. Ihr Moment $\mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}$ wird, addiert zum direkten Moment $\mathfrak{T}_{(\text{ph})}$ der Feldkräfte auf den Körper selbst, nicht mehr auf einen mit dem Moment der Maxwell'schen Spannungen Gl. (158) übereinstimmenden Ausdruck führen. Dies liegt aber an der Art der Herleitung der Maxwell'schen Ausdrücke aus dem Energieprinzip und sie dürfen dann in solchen Fällen auch nicht mehr angewendet werden. Die allgemeinste Form des ponderomotorischen Drehmomentes ist also die auf den direkten (körperfesten) Feldkräften aufbauende Darstellung durch die eben erwähnte Gl. (72).

Bisher wurden bei allen Untersuchungen kontinuierlich veränderliche Material- und Feldwerte vorausgesetzt. Es wird jedoch bei der praktischen Berechnung des Drehmomentes häufig der Fall sein, daß auch sprunghafte Veränderungen derartiger Größen auftreten. Die Darstellung des Drehmomentes als Oberflächenintegral ermöglicht die Behandlung solcher Fälle, indem man die Sprungfläche in bekannter Weise durch eine geschlossene Hüllfläche einschließt und den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ (h = Höhe des die Sprungfläche enthaltenden zylindrischen Volumens) durchführt. Man erhält so für das auf die Sprungfläche A wirkende Drehmoment ($n = n_2$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \int_A \mathbf{r} \times \{ \mathbf{T}_2 n_2 + \mathbf{T}_1 n_1 \} dA = \int_A \mathbf{r} \times \{ \mathbf{T}_2 n - \mathbf{T}_1 n \} dA = \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T} n)_1^2 dA = \\ &= \int_A \mathbf{r} \times \text{Div } \mathbf{T} dA, \end{aligned} \quad (183)$$

mit der Flächenvektordivergenz des jeweils in Frage kommenden Spannungstensors

$$\text{Div } \mathbf{T} = (\overline{\mathbf{T}n})_1^2. \quad (184)$$

Die Behandlung von Sprungflächen wurde im Zusammenhang mit dem Kraftangriff des elektromagnetischen Feldes an der Materie an anderer Stelle¹⁸ ausführlich erörtert, es gelten diese Ausführungen sinngemäß auch für das Drehmoment.

X. Das Drehmoment im allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feld

Beim nichtstationären Feld treten im Ansatz für das direkte Drehmoment zu den Summanden des stationären Feldes noch ein bzw. zwei Glieder hinzu, die den Kraftangriff des Feldes an den Polarisationsströmen berücksichtigen. Die Stromdichte des elektrischen Polarisationsstromes ist dabei durch $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$ gegeben, nach der „Mengen-theorie“ des Magnetismus tritt auch ein magnetischer Polarisationsstrom der Dichte $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ auf. Im Rahmen der „Elementarstromtheorie“ gibt es keine magnetischen Mengen und damit keinen magnetischen Polarisationsstrom. Im allgemeinen Feld empfiehlt

¹⁷ S. Fußnote 4, S. 4.

¹⁸ H. Hofmann: Die Behandlung von Sprungflächen beim Kraftangriff des stationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ing.-Arch. 11, H. 1 (1957).

es sich, elektrische und magnetische Erscheinungen gemeinsam zu behandeln, die weiterhin verwendete Bezeichnung „Mengentheorie“ bezieht sich dann auf die Kombination des elektrischen Feldes mit dem Magnetfeld der „Theorie magnetischer Mengen“. Die Bezeichnung „Elementarstromtheorie“ wird weiterhin für die Kombination des elektrischen Feldes mit dem magnetischen Feld der „Theorie der Elementarströme“ verwendet.

A. „Mengentheorie“

In den Ansatz für das Drehmoment nach der „Mengentheorie“ sind, wie schon erwähnt, neben den Summanden des stationären Feldes [Gln. (23) und (93)] auch die Momente der auf die (elektrischen und magnetischen) Polarisationsströme ausgeübten Kräfte aufzunehmen, also (s. auch ¹⁹, Kap. III)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \varrho^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \varrho^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \times \mathfrak{E} \right\} dV + \\ + \oint_A \mathbf{r} \times \{ \sigma_P^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \sigma_P^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} \} dA. \end{aligned} \quad (185)$$

Will man wieder für die Ladungs- und Stromdichten die entsprechenden Beziehungen mit den Feldvektoren einführen, so muß man neben den Gln. (9), (19), (12) und (13) die beiden folgenden, im Sinne der „Mengentheorie“ umgeformten Maxwell'schen Gleichungen des nichtstationären Feldes (vgl. ²⁰, Kap. 2)

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \quad (186)$$

und

$$\text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad (187)$$

berücksichtigen. Man erhält dann aus Gl. (185)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \mathfrak{E} \text{div } \mathfrak{E} + \text{rot } \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \text{div } \mathfrak{H} + \text{rot } \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \right\} dV + \\ + \oint_A \mathbf{r} \times \{ (\mathfrak{E}; \mathfrak{P} + \mathfrak{H}; \mathfrak{S}) \mathbf{n} \} dA. \end{aligned} \quad (188)$$

Das Drehmoment im nichtstationären Feld läßt sich wohl wieder in ein Volumintegral, nicht mehr aber in ein Oberflächenintegral allein umwandeln. Zur Umformung in ein Volumintegral werden die beiden Tensoren $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$ und $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})}$ zu

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} + \mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \mathbf{I} \quad (189)$$

zusammengefaßt und ferner wird die Impulsdichte des elektromagnetischen Makrofeldes der „Mengentheorie“

$$\mathfrak{G}_{\text{Imp}}^{(\text{M})} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \quad (190)$$

[s. ²¹, Gl. (57)] eingeführt. Die Umwandlung selbst erfolgt ähnlich den Umformungen der Gln. (24) und (94) in Gl. (32) bzw. Gl. (101), wobei man als Resultat

¹⁹ H. Hofmann: Über den Kraftangriff des allgemeinen, nichtstationären elektromagnetischen Feldes an der Materie. Österr. Ing.-Arch. **11**, H. 2 (1957).

²⁰ S. Fußnote 3, S. 3.

²¹ S. Fußnote 19, S. 19.

$$\mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})}}{\partial t} \right) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{S} \times \mathfrak{H} \right\} dV \quad (191)$$

erhält. Nun ist aber

$$\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})}}{\partial t} = \text{div } \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})}}{\partial t} = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \quad (192)$$

die an der Materie direkt angreifende Kraftdichte des nichtstationären elektromagnetischen Feldes der „Mengentheorie“ [s. ²², Gl. (66)], so daß wieder die Beziehung

$$\mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{S} \times \mathfrak{H} \right\} dV \quad (193)$$

folgt. Die Umformung des Drehmomentes $\mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})}$ in ein Oberflächenintegral gelingt nicht vollkommen, man erhält wegen

$$\int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \right) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{S} \times \mathfrak{H} \right\} dV = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \mathbf{n}) dA \quad (194)$$

aus Gl. (191) die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} &= \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \mathbf{n}) dA - \int_V \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})}}{\partial t} dV = \\ &= \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \mathbf{n}) dA - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})} dV. \end{aligned} \quad (195)$$

Das Drehmoment des fiktiven Spannungssystems $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \mathbf{n}$ liefert also im nichtstationären Feld die Summe aus dem an der Materie angreifenden direkten Drehmoment und der zeitlichen Änderung des Drehimpulses des elektromagnetischen Makrofeldes des betrachteten Volumens:

$$\oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \mathbf{n}) dA = \mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})} dV. \quad (196)$$

B. „Elementarstromtheorie“

Zu den Summanden des stationären Feldes tritt im Ansatz für das direkte Drehmoment nach der „Elementarstromtheorie“ das Moment der auf den elektrischen Polarisationsstrom ausgeübten Kraft [s. auch ²³, Gl. (28)]

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} &= \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \rho^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} \times \mathfrak{B} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{G}^{(\text{E})} \times \mathfrak{B} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{B} \right\} dV + \\ &+ \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \dot{\mathbf{i}}^{(\text{E})} \times \mathfrak{B} \right\} dA. \end{aligned} \quad (197)$$

Ersetzt man wieder die Ladungs- und Stromdichten durch die entsprechenden Beziehungen mit den Feldvektoren nach den Gln. (9), (12), (20), (21) und den im Sinne der „Elementarstromtheorie“ umgeformten Maxwell'schen Gleichungen (s. ²⁴, Kap. 1)

$$\text{rot } \mathfrak{B} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \text{rot } \mathfrak{S} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{G} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{G}^{(\text{E})} \quad (198)$$

²² S. Fußnote 19, S. 19.

²³ S. Fußnote 19, S. 19.

²⁴ S. Fußnote 3, S. 3.

und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad (199)$$

so erhält man mit Gl. (98)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \int_V \mathfrak{r} \times \left\{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{B} + \operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{B}) \right\} dV + \\ + \oint_A \mathfrak{r} \times \{ (\mathfrak{E}; \mathfrak{B}) \mathfrak{n} + (\mathfrak{J} \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{B} \} dA. \end{aligned} \quad (200)$$

Faßt man die beiden Tensoren $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})}$ und $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})}$ zum gemeinsamen Tensor $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})}$ des elektromagnetischen Feldes der „Elementarstromtheorie“ zusammen

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} + \mathfrak{S}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{S}) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathfrak{J} \mathfrak{B}) \mathbf{I} \quad (201)$$

und führt die Impulsdichte des Makrofeldes dieser Theorie ein [s. ²⁵, Gl. (23)]

$$\mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})} = \frac{1}{c_0} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} \quad (202)$$

ein, so liefert die Umwandlung des direkten Drehmomentes in ein Volumsintegral

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \int_V \left\{ \mathfrak{r} \times \left(\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})}}{\partial t} \right) + \mathfrak{B} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \right\} dV. \quad (203)$$

Der Ausdruck

$$\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})}}{\partial t} = \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \quad (204)$$

ist die an der Materie direkt angreifende Kraftdichte der „Elementarstromtheorie“ [s. ²⁶, Gl. (40)] und man erhält daher wieder die Beziehung

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \int_V \left\{ \mathfrak{r} \times \mathfrak{f}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} + \mathfrak{B} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \right\} dV. \quad (205)$$

Unter Benützung von

$$\int_V \left\{ \mathfrak{r} \times (\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})}) + \mathfrak{B} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \right\} dV = \oint_A \mathfrak{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \mathfrak{n}) dA \quad (206)$$

kann man Gl. (203) bis auf den die Impulsdichte enthaltenden Summanden in ein Oberflächenintegral umformen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} &= \oint_A \mathfrak{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \mathfrak{n}) dA - \int_V \mathfrak{r} \times \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})}}{\partial t} dV = \\ &= \oint_A \mathfrak{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \mathfrak{n}) dA - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathfrak{r} \times \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})} dV. \end{aligned} \quad (207)$$

Analog zur „Mengentheorie“ liefert auch im Rahmen der „Elementarstromtheorie“ das fiktive Spannungssystem $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \mathfrak{n}$ im nichtstationären Feld die Summe aus dem Drehmoment der direkt an der Materie angreifenden Kräfte und der zeitlichen Änderung des Drehimpulses des elektromagnetischen Makrofeldes:

$$\oint_A \mathfrak{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \mathfrak{n}) dA = \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathfrak{r} \times \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})} dV. \quad (208)$$

²⁵ S. Fußnote 19, S. 19.

²⁶ S. Fußnote 19, S. 19.

C. Das ponderomotorische Drehmoment

Das ponderomotorische Drehmoment müßte im nichtstationären Feld jedenfalls nach der allgemeinen Beziehung Gl. (72)

$$(72) \quad \mathfrak{T}_{\text{pond}} = \mathfrak{T}_{(\text{ph})} + \mathfrak{T}_{\text{Auftr.}}$$

berechnet werden, da die Auftriebskräfte und deren Moment wesentlich von den mechanischen Materialkonstanten der umgebenden Materie abhängig sind. Ein allgemeiner, nur elektrische und magnetische Größen enthaltender Ausdruck läßt sich daher prinzipiell nicht angeben (man vergleiche hierzu ²⁷, Kap. IV).

XI. Bemerkungen zum Maßsystem

Das in dieser Arbeit verwendete, auf nur drei Grundgrößen aufbauende Lorentzsche Maßsystem hat den bekannten Nachteil, der durch die zu geringe Zahl der Grundgrößen bedingt ist: Es ist dies das häufige Auftreten derselben Dimension bei gänzlich verschiedenen physikalischen Größen (z. B. Länge—Kapazität—Induktivität). Für die vorliegenden Untersuchungen hat sich andererseits die Dimensionsgleichheit der Größen \mathfrak{E} , \mathfrak{D} und \mathfrak{B} (bzw. \mathfrak{S} , \mathfrak{B} und \mathfrak{J}) als sehr praktisch erwiesen, da die Quellsdichte aller drei elektrischen Größen in gleicher Weise direkt die zugehörige Ladungsdichte, nämlich $\varrho^{(\text{el})}$, $\varrho_{\text{Wa}}^{(\text{el})}$ und $-\varrho_{\text{P}}^{(\text{el})}$, angibt. Ein auf vier Grundgrößen aufbauendes Maßsystem, in dem wieder \mathfrak{E} , \mathfrak{D} und \mathfrak{B} (bzw. \mathfrak{S} , \mathfrak{B} und \mathfrak{J}) gleiche Dimension haben, wurde zwar neuerdings vorgeschlagen (s. ²⁸), steht aber nicht in praktischem Gebrauch. Im Giorgi-System, das ebenfalls auf vier Grundgrößen aufbaut, haben die Größen \mathfrak{E} und \mathfrak{D} (bzw. \mathfrak{S} und \mathfrak{B}) verschiedene Dimensionen und damit gibt es für den Polarisationsvektor zumindest zwei gleichberechtigte Definitionsmöglichkeiten: eine mit \mathfrak{E} (bzw. \mathfrak{S}) und eine mit \mathfrak{D} (bzw. \mathfrak{B}) dimensionell gleiche Größe. In der Literatur häufiger und daher auch im folgenden verwendet wird der mit \mathfrak{D} (bzw. \mathfrak{B}) dimensionsgleiche Polarisationsvektor \mathfrak{P} (bzw. \mathfrak{J}).

Es soll an dieser Stelle ausdrücklich darauf verwiesen werden, daß aus reinen Dimensionsbetrachtungen keine grundlegenden Ergebnisse gewonnen werden können. Die Frage etwa, ob für den Kraftangriff des Magnetfeldes an Leitungsströmen der Vektor \mathfrak{S} oder \mathfrak{B} maßgebend ist, kann also durch einen Dimensionsvergleich nicht entschieden werden. Sowenig das Lorentzsche Maßsystem diese Frage wegen der gleichen Dimension von \mathfrak{S} und \mathfrak{B} „verschleiert“, sowenig „klärt“ das Giorgi-System dieses Problem zugunsten etwa des Vektors \mathfrak{B} . Vielmehr muß, wie in den diesbezüglichen Arbeiten des Verfassers gezeigt wurde, einerseits zwischen direktem (körperfestem) und ponderomotorischem (bewegendem) Kraftangriff, und andererseits wieder jeweils zwischen dem Standpunkt der „Mengen“- und dem der „Elementarstromtheorie“ unterschieden werden. Während der ponderomotorische Kraftangriff nach beiden Theorien übereinstimmend durch das Feld \mathfrak{B} bestimmt wird, ist für den direkten Kraftangriff nach der „Mengentheorie“ der Vektor \mathfrak{S} (und zwar auch im Giorgi-System und in allen anderen Maßsystemen!) und nach der „Elementarstromtheorie“ wieder der Vektor \mathfrak{B} maßgebend. Im Giorgi-System muß in einer Gleichung, in der nach der „Elementarstromtheorie“ der Vektor \mathfrak{B} steht, im entsprechenden Ausdruck nach der „Mengentheorie“, die den Vektor \mathfrak{S} enthält, zum Dimensionsausgleich eine universelle Konstante, nämlich μ_0 , auftreten. Maßgebend ist aber natürlich die Tatsache, daß in der „Mengentheorie“ der Vektor \mathfrak{S} und in der „Elementarstromtheorie“ der Vektor \mathfrak{B} , der in anisotroper Materie nicht nur einen anderen Betrag, sondern auch eine ganz

²⁷ S. Fußnote 19, S. 19.

²⁸ O. Löbl: Memorandum über elektrische und magnetische Einheiten. ETZ, 72. Jhg., H. 15.

andere Richtung hat als \mathfrak{H} (bzw. $\mu_0 \mathfrak{H}$), die Bedeutung der Feldstärke des magnetischen Makrofeldes besitzt.

Sämtliche Gleichungen dieser Arbeit können in einfacher Weise in die Schreibweise des rationalen Giorgi-Systems übertragen werden, wenn man die in diesem Maßsystem angegebenen Maxwell'schen Gleichungen und Beziehungen für den Kraftangriff an der Materie zugrunde legt.

Im Rahmen der „Mengentheorie“ gilt dann:

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad (209)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t}, \quad (210)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho'^{(\text{el})} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{P}}^{(\text{el})}) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\text{div } \mathfrak{D} - \text{div } \mathfrak{P}), \quad (211)$$

$$\text{div } \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \varrho'^{(\text{mgn})} = \frac{1}{\mu_0} \varrho_{\text{P}}^{(\text{mgn})} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } \mathfrak{J}, \quad (212)$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \quad (213)$$

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} + \mathfrak{J}. \quad (214)$$

Der Ansatz für das direkte Drehmoment im nichtstationären Feld lautet

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = & \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \varrho'^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \varrho'^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} + \mu_0 \mathfrak{G} \times \mathfrak{H} + \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} \times \mathfrak{E} \right\} dV + \\ & + \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \sigma_{\text{P}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \sigma_{\text{P}}^{(\text{mgn})} \mathfrak{H} \right\} dA. \end{aligned} \quad (215)$$

Es folgt daraus die Darstellung des Drehmomentes als Volumsintegral

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\nabla \tilde{\mathfrak{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})}}{\partial t} \right) + \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{J} \times \mathfrak{H} \right\} dV, \quad (216)$$

oder die andere mit Hilfe der fiktiven Spannungen

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} \mathbf{n}) dA - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})} dV, \quad (217)$$

wobei der Tensor $\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})}$ die Gestalt

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{M})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{M})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} + \mathfrak{H}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} \mu_0 \mathfrak{H}^2 \mathbf{I} \quad (218)$$

und die Impulsdichte die Form

$$\mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{M})} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \frac{1}{c_0^2} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \quad (219)$$

erhält.

Im Rahmen der „Elementarstromtheorie“ bestimmen die Maxwell'schen Gleichungen die Feldvektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{B} , im rationalen Giorgi-System lauten sie dann

$$\text{rot } \mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{G} + \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \text{rot } \mathfrak{J} = \mu_0 \mathfrak{G} + \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathfrak{G}^{(\text{E})}, \quad (220)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad (221)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho'^{(\text{el})} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\varrho_{\text{wa}}^{(\text{el})} + \varrho_{\text{p}}^{(\text{el})}) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\operatorname{div} \mathfrak{D} - \operatorname{div} \mathfrak{P}), \quad (222)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \quad (223)$$

Hiezu kommen wieder die Gln. (213) und (214). Der Ansatz für das direkte Drehmoment lautet im nichtstationären Feld der „Elementarstromtheorie“

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = & \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \varrho'^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} + \mathfrak{E}^{(\text{E})} \times \mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{B} \right\} dV + \\ & \oint_A \mathbf{r} \times \left\{ \sigma_{\text{p}}^{(\text{el})} \mathfrak{E} + \mathbf{j}^{(\text{E})} \times \mathfrak{B} \right\} dA. \end{aligned} \quad (224)$$

Die Umformung des direkten Drehmomentes in ein Volumsintegral ergibt

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \int_V \left\{ \mathbf{r} \times \left(\nabla \tilde{\mathbf{T}}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} - \frac{\partial \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})}}{\partial t} \right) + \mathfrak{B} \times \mathfrak{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \right\} dV \quad (225)$$

und die Darstellung mit Hilfe der fiktiven Spannungen lautet

$$\mathfrak{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \oint_A \mathbf{r} \times (\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} \mathbf{n}) dA - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})} dV. \quad (226)$$

Der allgemeine Tensor des nichtstationären Feldes hat die Form

$$\mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el}, \text{E})} = \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{el})} + \mathbf{T}_{(\text{ph})}^{(\text{E})} = \mathfrak{E}; \mathfrak{D} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 \mathbf{I} + \mathfrak{E}; \mathfrak{B} - \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{E}) \mathbf{I} + \frac{1}{2 \mu_0} (\mathfrak{J} \mathfrak{B}) \mathbf{I} \quad (227)$$

und die Impulsdichte der „Elementarstromtheorie“ wird jetzt im Giorgi-System

$$\mathfrak{G}_{\text{Imp.}}^{(\text{E})} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} \quad (228)$$

geschrieben. Entsprechend der um eins größeren Anzahl von Grundgrößen im Giorgi-System treten anstelle der einen universellen Konstanten c_0 des Lorentz-Systems jetzt zwei universelle Konstante, nämlich ε_0 und μ_0 , in den Beziehungen des elektromagnetischen Feldes auf. [Die universelle Konstante c_0 in der zweiten Darstellungsform der Impulsgleichung (219) und (228) ist nicht mehr unabhängig von ε_0 und μ_0 , sondern mit Hilfe des Zusammenhanges

$$c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (229)$$

eingeführt worden.]

Abschließend soll auf Grund der Zusammenstellung der im Giorgi-System angegebenen Beziehungen der „Mengentheorie“ [Gln. (209) bis (219)] und der „Elementarstromtheorie“ [Gln. (220) bis (228)] folgendes bemerkt werden: Man ordnet heute, aufbauend auf den Ergebnissen der Elektronentheorie („Elementarstromtheorie“) den Feldvektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{B} die Bedeutung der Feldstärke des elektrischen bzw. des magnetischen Makrofeldes zu und faßt sie zum Beispiel bei der vierdimensionalen Schreibweise im Rahmen der Relativitätstheorie zu einem allgemeinen Feldtensor zusammen. Trotzdem ist, wegen der Entwicklung aus dem elektromagnetischen Maßsystem, im Giorgi-System die Wahl der Dimensionen und Einheiten so getroffen, daß noch die alte, von der „Mengentheorie“ herrührende Analogie der Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} (und damit \mathfrak{D} und \mathfrak{B}) in Erscheinung tritt [(\mathfrak{E}) = V/m , (\mathfrak{H}) = A/m , (\mathfrak{D}) = (\mathfrak{B}) = As/m^2 , (\mathfrak{B}) = (\mathfrak{J}) = Vs/m^2 usw.]. Die mit \mathfrak{D} bzw. \mathfrak{B} dimensionsgleichen Polarisationsvektoren \mathfrak{P} und \mathfrak{J} gehen dann beide unmittelbar auf die Darstellung des elektrischen und des magnetischen Momentes je Volumseinheit mit Hilfe elektrischer bzw. magnetischer

Mengen zurück $[(\mathfrak{P}) = (Q^{(el)}) \cdot (l)/(V) = As \cdot m/m^3 = As/m^2, (\mathfrak{S}) = (Q^{(mgn)}) \cdot (l)/(V) = Vs \cdot m/m^3 = Vs/m^2]$. Dies äußert sich zum Beispiel in den entsprechenden Momentengleichungen Gl. (216) und Gl. (225) dadurch, daß die Momentendichte der Kräftepaare im Feld elektrischer Mengen durch $\mathfrak{P} \times \mathfrak{E}$, im Feld magnetischer Mengen unmittelbar durch $\mathfrak{S} \times \mathfrak{H}$, im Feld der Elementarströme jedoch durch $\frac{1}{\mu_0} \mathfrak{S} \times \mathfrak{B}$ gegeben ist.

Wie schon erwähnt, soll man nach Ansicht des Verfassers Dimensionsbetrachtungen keine allzu große Bedeutung beimessen, da die Festlegung der Dimensionen einer gewissen Willkür unterworfen ist. Es handelt sich also gewissermaßen nur um einen Schönheitsfehler des üblichen $l-t-U-I$ -Dimensionssystems bzw. des $m-s-V-A$ -Einheitensystems, der aber auf Grund des allgemeinen Gebrauchs des Giorgi-Systems weder zu beseitigen sein wird noch auch — etwa durch Einführung wieder eines neuen Maßsystems — beseitigt werden soll.

Die einerseits für die Zusammenfassung zu allgemeinen Feldtensoren im Sinne der Elektronentheorie („Elementarstromtheorie“) zweckmäßige Dimensionsgleichheit von \mathfrak{E} und \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{D} und \mathfrak{H} (im Sinne der „Mengentheorie“ sollten hierfür wieder \mathfrak{E} und \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{D} und \mathfrak{B} gleiche Dimension besitzen) und andererseits der eingangs zu diesem Kapitel erwähnte Vorteil bei der Verwendung gleicher Dimensionen für \mathfrak{E} , \mathfrak{D} und \mathfrak{P} bzw. \mathfrak{S} , \mathfrak{B} und \mathfrak{J} , führt schließlich auf die Dimensionsgleichheit aller sechs elektromagnetischen Feldgrößen. Sie ist, bei rationaler Schreibweise der Größen, nur im Lorentzschen Maßsystem verwirklicht; dieser Umstand soll die Verwendung dieses Maßsystems im Rahmen theoretischer Untersuchungen begründen.

(Eingegangen am 14. Januar 1958)

On the Motion of Plastic Mass*

by

C. Torre, Syracuse, New York (U. S. A.)

Zusammenfassung. In diesem Beitrag wurden die Bewegungsgleichungen einer plastischen Masse untersucht, weiterhin zwei Fälle des ebenen Spannungszustandes: Der ideal plastische Körper und ein Körper mit einer allgemeinen Grenzbedingung, in der nur die Geschwindigkeiten als Veränderlichen angenommen wurden. Als Beispiel wurde die Torsion eines Stabes berechnet.

Summary. This paper discusses the general equations governing the motion of plastic mass. There also are investigated two cases of the plane stress problem, the ideal plastic body and a body with a general limiting condition in terms of velocities. The torsion of a rod is computed as an example.

I. Introduction

This paper discusses the three-dimensional problem and the plane problem of the motion of plastic mass. The five unknowns in the three-dimensional problem are the three velocities, the mean pressure, and the density. There are also five equations: three equations of motion, the continuity equation and a general limiting condition in terms of rate of strains. The dynamical problem of torsion of a round bar is investigated as a special case of the three-dimensional problem with a yield condition containing quadratic and also linear terms. Finally, the dynamical plane problem of an ideal plastic body and the plane problem of a plastic body with a general limiting condition in terms of velocities are investigated.

* Sponsored by Westinghouse Electric Company. — Dedicated to Professor Dr. A. L. Nadai on his seventy-fifth birthday (April 3, 1883).

II. On the Motion of Plastic Mass, General Formulations

In the following we shall derive the equations of motion of plastic mass for the three-dimensional case in the Cartesian coordinates (x, y, z) .

The complete system of equations of motion is as follows:

a) The general equation of motion of a continuum which reads

$$\nabla \cdot \bar{S} + \bar{f} = \rho \frac{d\bar{v}}{dt}; \quad (1)$$

b) The continuity equation

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \bar{v} = 0; \quad (2)$$

c) The condition of limit strength of materials (or shortly limiting condition)

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0; \quad (3)$$

d) The stress-rate of strain relations

$$\bar{S} = 2\mu \dot{\bar{V}} + (-p + \lambda \nabla \cdot \bar{v}) \bar{J}. \quad (4)$$

Eqs. (1) to (4) represent eleven equations in eleven unknowns: six stresses $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, three velocities v_x, v_y, v_z , the value p and the density ρ .

In this system of equations $\bar{S} = \bar{i}\bar{i}\sigma_x + \dots + (\bar{i}\bar{k} + \bar{k}\bar{i})\tau_{zx}$ is the stress tensor; σ_x , etc. are the normal stresses; $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, etc. the shear stresses; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ are the unit vectors in the direction of coordinates x, y, z . The symbol $\nabla = \bar{i}\partial/\partial x + \bar{j}\partial/\partial y + \bar{k}\partial/\partial z$ is the formal vector of vector differentiation; the dot "·" in Eqs. (1), (2) and (4) signifies the scalar product of a vector or tensor, ρ is the density, t is the time variable, $\bar{f} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z$ is the vector of the mass forces, $\bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z$ is the velocity vector. In Eq. (4) μ and λ are the viscosity coefficients, $\dot{\bar{V}} = \bar{i}\bar{i}\partial v_x/\partial x + \dots + 1/2(\bar{i}\bar{k} + \bar{k}\bar{i})(\partial v_y/\partial x + \partial v_x/\partial y)$ is the tensor of the rate of strains, $\bar{J} = \bar{i}\bar{i} + \bar{j}\bar{j} + \bar{k}\bar{k}$ is the unit dyadic. The expression in Eqs. (2) and (4)

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (5)$$

represents the rate of the volume dilatation and the expression

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (6)$$

the mean stress. Further the value

$$p = -\sigma_m + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right) \nabla \cdot \bar{v} \quad (7)$$

or according to Eq. (2) $p = -\left[\sigma_m + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right]$

is an unknown which follows from the terms in the principal diagonal of the stress tensor matrix by addition.

Substituting Eq. (7/1) in Eq. (4), we can eliminate the second viscosity coefficient and work with the mean stress σ_m , Eq. (6), which we will call again with $-p$ to remain in the usual terminology. Eq. (4) now reads

$$\bar{S} = 2\mu \dot{\bar{V}} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \bar{v} \right) \bar{J}. \quad (4a)$$

The assumption made by Stokes that $\lambda = -2\mu/3$ is here formally realized. See about the coefficient λ at Sommerfeld¹, Skudrzyk² and author³. Of interest are the derivations of the stress-rate of strain relations and of the equation of motion by Schlichting⁴, who avoids the coefficient λ .

Substituting Eqs. (4a) in (1) and (3), we reduce the system of eleven equations to a system of five equations in five unknown v_x , v_y , v_z , p and ϱ . The new system of equations reads therefore (without mass forces)

$$\varrho \frac{d\bar{v}}{dt} = \mu \Delta \bar{v} - \nabla p + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \bar{v}), \quad (8)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (9)$$

$$f\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 0. \quad (10)$$

Eqs. (8), (9) and (10) are the equations of motion of plastic mass.

We can suppose that the limiting condition, Eq. (10), is not given in terms of rate of strains but in terms of velocities. Supposing the limiting condition written in the explicit form $v_z = G(v_x, v_y)$ and we substitute the velocity v_z in Eqs. (8) and (9), we reduce the system of equations further to four equations in four unknowns v_x , v_y , p and ϱ .

The boundary conditions may be formulated for each problem separately. In solids the boundary conditions are usually given in terms of stresses, but they can be given also in terms of velocities or displacements.

Eqs. (8) to (10) are formally similar to the equation of motion of compressible frictional fluids. A difference (not too large) between the fluid dynamics and dynamics of plastic mass is that the limiting condition Eq. (3) or (10) appears instead of the equation of state of matter which is a function of the density ϱ and pressure p . Further differences appear in the magnitude of the viscosity coefficient μ , which is very big in comparison with the small velocities v_x , v_y , v_z . For this, see second paper in Reference 3. Further, the expression p differs here from the one in fluid dynamics. For example, in the static case we cannot here take $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$. In a static case we must work with Eqs. (1) and (3) which only in the plane problem have a determinate system of equations. Therefore, some differences between the fluid dynamics and motion of a plastic mass are obvious.

B. de St. Venant⁵ investigates in plastico-dynamics only the plane problem (see Nadai^{6,7}, p. 464-5). He works with Eqs. (8) and (9) assuming a constant density, however, with an incompressible mass. The limiting condition Eq. (10) or (3) remains without a full consideration: The shear stress satisfies only partially the yield condition for ideal plastic bodies. The complete plane problem without acceleration terms (case of creeping plastic flow) has been investigated by Hilda Geiringer⁸.

¹ A. Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. II; Mechanik der deformierbaren Medien. Wiesbaden. 1947.

² E. Skudrzyk: Österr. Ing.-Arch. **3**, 356 (1949); **6**, 157 (1952); Acta Physica Austriaca **2**, 148 (1948).

³ C. Torre: Z. angew. Math. Mech. **33**, 300 (1953); Österr. Ing.-Arch. **6**, 417 (1952).

⁴ H. Schlichting: Boundary Layer Theory. New York. 1955. English by J. Kestin.

⁵ B. de St. Venant: C. R. Vol. 70, p. 368, 473 (1870); Vol. 73, p. 86, 1098, 1181 (1871); Vol. 74, p. 1009, 1083.

⁶ A. Nadai: Plastizität und Erddruck. Article in Handbuch der Physik, Vol. VI, 428. Berlin: Springer 1928.

⁷ A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids. New York: McGraw-Hill Book Co. 1950.

⁸ H. Geiringer: Advances in Applied Mechanics, Vol. III (1953), 197. See also the Bibliography on 292.

R. v. Mises⁹ computes the motion of a plastic mass in three-dimensional case. He applies Eqs. (1) to (4) and works with the value p . He considers both the continuity condition for incompressible fluids $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ and the yield condition for ideal plastic bodies. Assuming $\nabla \cdot \bar{v} = 0$, Mises obtains ten unknowns but eleven equations. To remove this indetermination he takes as eleventh unknown the viscosity coefficient μ . The second viscosity coefficient λ does not appear, because $\nabla \cdot \bar{v} = 0$. The viscosity coefficient now becomes a function of the rate of strains $\partial v_x / \partial x$, etc. The stress σ_x has in accordance with Eq. (4) the following form: $\sigma_x = 2 (\partial v_x / \partial x, \dots) \cdot \partial v_x / \partial x - p$. In other words, we have a function of the form $y = y(x) \cdot x$. It is much shorter to write immediately $y = y(x)$, as Schultz-Grunow¹⁰ mentioned. Similar proposals about a variable coefficient μ were made by many other authors, Nadai¹¹ has given numerical results for few cases.

Suggestions about variational methods in the statics of plastic mass have been given by Haar and Karman¹². This paper has been completed by Hencky¹³. He obtains the stress-strain relations for an elastic ideal plastic body. The author¹⁴ has derived, by the methods of Hencky, equations for stress strains relations of a body which has the ratio of compression and tension strength greater than one: $\sigma_C / \sigma_T > 1$. This is the case of the strain hardening¹⁵. Hencky¹⁶ gives suggestions for a theory of nonstationary plastic flow.

If we neglect the acceleration terms in the equation of motion (1) or (8) and consider the velocities in Eqs. (4), we have the case of a creeping flow of plastic mass corresponding to the papers by Geiringer¹⁷. The statics of a plastic mass will be defined with Eq. (1) without acceleration terms and with Eq. (3). In the special case of the plane problem the number of equations is equal to the number of unknowns.

III. The Plastic Torsion

A special example is the problem of torsion in the range of plastic deformation, because we have here $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ and therefore from Eq. (9) $d\rho/dt = 0$ or $\rho(x, y, z)$ only. We can take also $\rho = \text{constant}$, which simplifies computing greatly. A set of equations for the torsion of a round bar will be given in the following example.

We assume that the stresses $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \tau_{r\phi}$ may be zero and that we have a rotational symmetry with $\partial \dots / \partial \phi = 0$. To satisfy these conditions it must be

$$\partial v_r / \partial r = 0, \quad \partial v_z / \partial z = 0$$

$$v_r / r = 0 \quad \text{or} \quad v_r = 0$$

and

$$p = 1/3 (\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z) = 0.$$

We are computing here the shear stresses $\tau_{rz}, \tau_{\phi z}$ and the velocities v_x, v_y, v_z . There are five unknowns for which we need five equations. The origin at $z = 0$ of the coordinate

⁹ R. v. Mises: Göttinger Nachrichten 1913, 582.

¹⁰ F. Schultz-Grunow: Kolloid-Zeitschrift **141**, 173 (1955).

¹¹ A. Nadai: Inst. Mech. Eng. London; Appl. Mech. Proceedings 1947, Vol. 157, 121. See also the German translation in Österr. Ing.-Arch. 1949 und 1951.

¹² A. Haar and Th. v. Karman: Göttinger Nachrichten 1909, 204.

¹³ H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. **4**, 323 (1924).

¹⁴ C. Torre: Österr. Ing.-Arch. **4**, 93 (1950).

¹⁵ C. Torre: Österr. Ing.-Arch. **4**, 174 (1950); „Jahrbuch 1953“ der Wiss. Ges. für Luftfahrt (WGL). Braunschweig: Vieweg and Sohn.

¹⁶ H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. **5**, 144 (1925).

¹⁷ See Note 8, p. 27.

system may be taken on the built-in end, on the other end at $z = l$ act the torsion moment M .

In cylindrical coordinates the equations (1) of motion are

$$\varrho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \quad \varrho \frac{\partial v_\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \tau_{\Phi z}}{\partial z}, \quad \varrho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{l}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}). \quad (11)$$

The negative sign in Eqs. (11/1, 2) corresponds to the resistance of mass against torsion strength.

From Eqs. (4) the stress-rate of strains relations for this case are

$$\tau_{\Phi z} = \mu \frac{\partial v_\Phi}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \quad \tau_{r\Phi} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\Phi}{r} \right) = 0. \quad (12)$$

As limiting condition Eq. (3) we shall take here a yield condition with quadratic and linear terms, which reads

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r - \sigma_\Phi)^2 + (\sigma_\Phi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\Phi}^2 + \tau_{\Phi r}^2 + \tau_{rz}^2) + \\ + 2(c - 1)(\sigma_r + \sigma_\Phi + \sigma_z) = 2c\sigma_T^2 \\ c = \sigma_C/\sigma_T. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

σ_C is the compression strength, σ_T the tension strength. For $c = 1$ Eq. (13) gives the yield condition for ideal plastic bodies; for $1 < c < 3$ for strain hardening of metals, see author¹⁸. In our case Eq. (13) becomes

$$\tau_{\Phi z}^2 + \tau_{rz}^2 = \frac{c}{3} \sigma_T^2. \quad (14)$$

If we put Eqs. (12/1, 2) in Eq. (14) the yield condition reads

$$\left(\frac{\partial v_\Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 = \frac{c}{3} \left(\frac{\sigma_T}{\mu} \right)^2. \quad (15)$$

Eliminating the shear stress τ_{rz} in Eqs. (11/1, 3) we have a differential equation in the velocities v_r and v_z that reads (it is already integrated with respect to t , but the integration function of r and z is taken to be zero)

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0. \quad (16)$$

Eq. (16) represents the continuity equation for an incompressible fluid $\nabla \cdot \bar{v} = 0$. This equation is identically equal to zero because $\sigma_r = \sigma_\Phi = \sigma_z = 0$, or $\partial v_z / \partial z = 0$, $v_r = 0$, $\partial v_r / \partial r = 0$.

For five unknowns τ_{rz} , $\tau_{z\Phi}$, v_r , v_Φ , v_z we have five equations (11/2), (12/1, 2), (15) and (16). Eq. (12/3) gives only the linear dependence of the velocity v_Φ on r : $v_\Phi = r f(z, t)$ or using the separation of variables,

$$v_\Phi = r Z(z) e^{-st}. \quad (17)$$

Eliminating the shear stress $\tau_{\Phi z}$ from Eqs. (11/2) and (12/1) we have a parabolic partial differential equation in v_Φ that reads

$$\frac{\partial v_\Phi}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial z^2}, \quad \nu = \mu/\varrho \quad (18)$$

¹⁸ See Note 15, p. 28.

Substituting Eq. (17) in (18), we have an ordinary differential equation for the function $Z(z)$ which reads

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0, \quad k^2 = s/\nu. \quad (19)$$

The solution of Eq. (10) will be given in terms of hyperbolic functions. According to Eq. (17) the velocity v_Φ reads, with $B_m \cos k_m a = 0$ because at $z = 0$ must be on the built-in end $v_\Phi = 0$,

$$v_\Phi = r e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin k_m z \quad (20)$$

According to Eq. (12/1) and (20) the shear stress $\tau_{\Phi z}$ becomes

$$\tau_{\Phi z} = \mu r e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} k_m A_m \cos k_m z \quad (21)$$

The shear stress $\tau_{\Phi z}$ Eq. (21) is a linear function of r , this implies that the distribution of shear stress $\tau_{\Phi z}$ over the cross section of the bar is linear. We are dealing here with a dynamical loading within the range of plastic deformations, in which the various cross sections in the z direction have various shear stresses in accordance with the $Z(z)$ function. The time decay gives a relaxation of velocity v_Φ and of the shear stress $\tau_{\Phi z}$ with increasing time.

To compute the velocities v_r and v_z we need two equations. The first is the yield condition Eq. (15). If the derivative of Eq. (20) with respect to x calling $\Phi(r, z, t) = \partial v_\Phi / \partial z$, the yield condition Eq. (15) reads, with $\partial v_r / \partial r = 0$,

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \pm \sqrt{\frac{c}{3} \left(\frac{\sigma \tau}{\mu} \right)^2 - \Phi^2}. \quad (22)$$

To make v_z independent of z to satisfy the condition $\partial v_z / \partial z = 0$ it must be

$$\Phi = \frac{\partial v_\Phi}{\partial z} = A r e^{-st}. \quad (23)$$

If now the velocity

$$v_\Phi = A z r e^{-st} + C \quad (20a)$$

it follows that we work here with small arguments kz according to Eq. (20).

A second equation which must be satisfied follows from Eqs. (11/3) and (12/2), which reads

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (24)$$

According to Eq. (22) and (24), the velocity v_z reads

$$v_z = \pm \nu \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\frac{c}{3} \left(\frac{\sigma \tau}{\mu} \right)^2 - (A r)^2} e^{-2st} + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{c}{3} \left(\frac{\sigma \tau}{\mu} \right)^2 - (A r)^2} e^{-2st} \right] dt \quad (25)$$

It is interesting that the velocity v_z is a function of the variable r . Therefore also the displacement $w = \int_0^t v_z dt$ is dependent of r . We have here a deformation of the cross section of a round twisted bar, similar to the results in the theory of the elastico-viscous bodies (see author¹⁹) and in contrast to the results of the theory of elasticity, in which the cross section of a round twisted bar remains plane (without deformations).

¹⁹ C. Torre: Österr. Ing.-Arch. 8, 55 (1954); Kolloid-Zeitschrift 138, 11 (1954).

However, here it must be considered that it is difficult to realize a pure torsion of a long bar without buckling phenomenon. To avoid the buckling of the rod, it will be loaded with a small tension force. Such observations can be made easily in the production of the Tor-Steel for reinforced concrete²⁰.

Physically possible deformations of a twisted round bar without tension forces are described by the theory of elasto-viscous bodies given in paper by the author²¹. No condition of the limit strength was taken into account in this paper²².

IV. The Plane Problem of an Ideal Plastic Body

We consider here the plane stress problem with $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ and with $\partial \dots / \partial z = 0$. We do not consider the convective terms of the acceleration. Therefore, it follows that $dv_x/dt = \partial v_x / \partial t$ and $dv_y/dt = \partial v_y / \partial t$. The equations of motion (1) now read

$$\varrho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \varrho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}. \quad (26)$$

The continuity equation (2) for the plane problem reads

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (27)$$

For the limiting condition Eq. (3) we shall take here a special yield condition for an ideal plastic body. This is a quadratic expression in stresses without linear terms. It is

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 \tau_0^2. \quad (28)$$

The stress-rate of strain relations for the plane problem are according to Eq. (4)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Substituting Eqs. (29) in (26) and (28), we obtain the differential equations of motion of an ideal plastic body, which read

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \bar{v}), \\ \varrho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \bar{v}), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\tau_0}{\mu} \right)^2 \quad (31)$$

and the continuity equation

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \nabla \cdot \bar{v} = 0. \quad (32)$$

Eqs. (30/1, 2), (31) and (32) are four equations in four unknowns v_x , v_y , p and ϱ . The general solution is difficult, especially since the equation (31) has quadratic terms.

²⁰ Schmidtstahlwerke A. G. Wien (Austria).

²¹ See Note 19, p. 30.

²² See Note 19, p. 30.

In this case we can take the density constant. According to Ep. (32) we obtain $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ which will not be considered in further computations, because it duplicates the limiting condition Eq. (31).

If we differentiate Eq. (30/1) with respect to y and Eq. (30/2) with respect to x and we subtract these two equations, we have

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \Delta \omega, \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (33)$$

If we add the differentiated equations instead of subtracting we have

$$\rho \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} = \mu \Delta \dot{\gamma} - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nabla \cdot \bar{v}). \quad (34)$$

With the special assumptions for the value p and for the rate of the volume dilatation

$$p = f_1(x, t) + g_1(y, t), \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad (35)$$

Eq. (34) simplifies as follows

$$\rho \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} = \mu \Delta \dot{\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (37)$$

In Eq. (33) ω is the angular velocity (vortex) and in Eq. (37) $\dot{\gamma}$ is the rate of shear strain.

Both Eqs. (35) and (37) are parabolic differential equations for dissipative (frictional) processes. Their solutions are well known, and are formally the same as the solutions of the differential equation for heat transfer or diffusion. The solutions can be found with the method of separation of variables with the time decay: e^{-nt} . In this case we can use the Fourier series in x and y ; or we have the solution of the type $(1/\sqrt{t}) \cdot e^{-x^2/4\nu t}$, $\nu = \mu/\rho$, and other additional solutions.

We can make our further derivations also with the remark that the solutions of Eqs. (33) and (37) are

$$\omega = \omega(x, y, t), \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(x, y, t). \quad (38)$$

Substituting Eq. (38/2) in the yield condition Eq. (31), we have with Eq. (33/2) two simultaneous differential equations in v_x, v_y which read

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\mu}\right)^2 - \dot{\gamma}^2(x, y, t)}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega(x, y, t). \quad (40)$$

To find separate equations each containing just one of the velocities v_x and v_y , we differentiate Eq. (39) with respect to y and Eq. (40) with respect to x and add. As a second step we differentiate Eq. (39) with respect to x and Eq. (40) with respect to y and add. This gives two hyperbolic differential equations in v_x and v_y which read

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \pm \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\mu}\right)^2 - \dot{\gamma}^2}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\mu}\right)^2 - \dot{\gamma}^2}. \quad (42)$$

These differential equations have the equation of characteristics

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1. \quad (43)$$

Eq. (43) has as solution two families of straight lines

$$x + y = \text{const.} \quad x - y = \text{const.}, \quad (44)$$

corresponding to the homogenous stress distribution $\sigma_x - \sigma_y = \text{const.}$, where σ_x and σ_y are the principal normal stresses. The straight lines Eq. (44) are inclined to the x and y axes at the angle of 45° . Each of these straight lines is perpendicular to the other as in the behavior of ideal plastic bodies.

Using the transformation in the direction of characteristics Eq. (44): $u = x + y$, $v = x - y$, we obtain the integrals of Eqs. (41) and (42) which read

$$v_x = -\frac{1}{2} \int (\omega dy \mp \sqrt{(\tau_o/\mu)^2 - \dot{\gamma}^2} dx) + F(x+y) + G(x-y), \quad (41a)$$

$$v_y = +\frac{1}{2} \int (\omega dx \mp \sqrt{(\tau_o/\mu)^2 - \dot{\gamma}^2} dy) + f(x+y) + g(x-y). \quad (42a)$$

If w and z are the orthogonal curvilinear coordinates, Eq. (43) reads

$$\frac{dz}{dw} = \pm 1. \quad (43a)$$

Its solution is

$$z \pm w = \text{const.} \quad (44a)$$

Investigating the polar and bipolar coordinate systems with $w = \ln r$, $z = \Phi$ and $w = \Phi_1 - \Phi_2$, $z = \ln r_1/r_2$, we obtain according to Eq. (44a) $r/r_0 = e^{\pm \Phi}$ and $r_1/r_2 = ke^{\pm (\Phi_1 - \Phi_2)}$. These are logarithmic and bipolar logarithmic spirals respectively. These are valid for example if the boundary conditions and the loading are along the special coordinate curves of the principal normal stresses.

If we know the solutions for the velocities v_x and v_y from Eqs. (41) and (42), the value of p will be computed according to Eqs. (30/1, 2) considering Eq. (35/2) which give

$$\Delta p = 0. \quad (45)$$

The boundary conditions will be taken separately for each special case.

V. Plane Problem with a General Limiting Condition in Terms of Velocities

We consider here the plane problem as in Chapter IV. with $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ and $\partial \dots / \partial z = 0$. We do not consider the convective terms of acceleration. Therefore we have $dv_x/dt = \partial v_x / \partial t$ and $dv_y/dt = \partial v_y / \partial t$. The equations of motion and of the continuity are

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \quad (46)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{dv_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (47)$$

We shall assume the limiting condition in terms of velocities instead in terms of rate of strains as in Eq. (31). We work here with the explicit form

$$v_y = f(v_x). \quad (48)$$

The stress-rate of strains relations are

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

We have here seven equations (46), (48) and (49) in seven unknowns: two velocities v_x, v_y ; three stresses $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; the value p and the density ϱ . Substituting Eqs. (49) in Eqs. (46), we obtain the system of equations of motion of a plastic mass

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}), \\ \varrho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{v}), \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0, \quad v_y = f(v_x). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

There are four equations in four unknowns v_x, v_y, p and ϱ .

As in Chapter IV, we shall assume $\varrho = \text{constant}$. The continuity equation (50/3) reads now $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. It will not be considered here, because it specialises the limiting condition Eq. (48). According to Eqs. (50/1, 2) we obtain $\Delta p = 0$.

If we differentiate Eq. (50/1) with respect to y and Eq. (50/2) with respect to x and if we subtract these two equations, we obtain

$$\varrho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \Delta \omega, \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (51)$$

ω is here as in Eq. (33) the angular velocity (vortex) and the solution of Eq. (51) is a known function $\omega(x, y, t)$. Therefore we have a differential equation in v_x and v_y

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega(x, y, t). \quad (52)$$

With the limiting condition

$$v_y = f(v_x) \quad (53)$$

there are two equations in two unknowns v_x and v_y . Substituting Eq. (53) in (52) we have the following quasi-linear partial differential equation

$$F = \frac{df(v_x)}{dv_x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} - \omega(x, y, t) = 0. \quad (54)$$

Eq. (54) is of first order. We can set up the differential equations of characteristics without restriction whether the equation (54) is linear or not. However, it must be linear in derivatives. The equations of characteristics read (see f. e., Horn²³, p. 189).

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial \bar{p}}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial \bar{q}}} = \frac{dv_x}{\bar{p} \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} + \bar{q} \frac{\partial F}{\partial \bar{q}}} = -\frac{d\bar{p}}{\frac{\partial F}{\partial x} + \bar{p} \frac{\partial F}{\partial v_x}} = -\frac{d\bar{q}}{\frac{\partial F}{\partial y} + \bar{q} \frac{\partial F}{\partial v_x}}, \quad (55)$$

with

$$\bar{p} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \bar{q} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (56)$$

²³ J. Horn: Partielle Differentialgleichungen. W. D. Gruyter and Co., 1929.

According to Eq. (54) we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{\partial \omega}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} &= \frac{df}{dv_x}, & \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} &= -1; \\ \text{we call} \\ R &= \frac{\partial F}{\partial v_x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} = 0, & S &= \frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, & T &= \frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

According to Eq. (55/1, 2) the characteristic directions will be obtained from

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} \Big/ \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} = -1 \Big/ \frac{df}{dv_x}, \text{ or } \frac{df}{dy} + \frac{dv_x}{dx} = 0, \quad (58a)$$

which read, because f and v_x are functions of x and y ,

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Big/ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \Big/ 4 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}}. \quad (58)$$

Eq. (58a/2) corresponds to the mapping of the Prandtl-Busemann nets in the plane supersonic flow. See Geiringer⁸.

From Eqs. (55/1, 2, 3) follows the total differential of the velocity $dv_x = \bar{p}dx + \bar{q}dy$. Further, according to Eqs. (55/2, 4, 5), we obtain two differential equations in \bar{p} and \bar{q} . They read

$$\frac{d\bar{p}}{dy} + \bar{p}R + S = 0, \quad \frac{d\bar{q}}{dy} + \bar{q}R + T = 0. \quad (59)$$

Using Eqs. (55/1, 4, 5) we obtain similar differential equations in $d\bar{p}/dx$ and $d\bar{q}/dx$. Assuming that the \bar{p} and \bar{q} of both cases are equal, we obtain again Eq. (58a). Eqs. (59) are special cases of the Bernoulli differential equation $d\bar{p}/dy + \bar{p}R + Sy^n = 0$, with $n = 0$. Therefore the solutions are

$$\bar{p} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = e^{-\int R dy} \left(C_1 - \int S e^{\int R dy} dy \right), \quad \bar{q} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = e^{-\int R dy} \left(C_2 - \int T e^{\int R dy} dy \right). \quad (60)$$

A singular integral for v_x reads

$$v_x = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) dx dy + f(x) + g(y). \quad (60a)$$

In Eq. (60a) $f(x)$ and $g(y)$ are the integration functions, \bar{p} and \bar{q} represent the integrals in Eq. (60). Taking into account Eqs. (57/5, 6, 7), Eq. (60) reads

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = C_1 - \int \frac{\partial \omega}{\partial x} dy, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = C_2 - \int \frac{\partial \omega}{\partial y} dy = C_2 - \omega. \quad (61)$$

The integral of Eq. (61) becomes

$$v_x = - \int \omega(x, y, t) dy + C_1 x + C_2 y + C_3. \quad (62)$$

The values C_1, C_2, C_3 are either functions of the time or they are constants. The same result follows according to Eq. (60a) considering that $f(x) = C_1 x + C_3/2$, $g(y) = C_2 y + C_3/2$. According to Eqs. (55/2, 3), there are $C_1 = C_2 = 0$. If, according to Eq. (62), the velocity v_x is a known function of x, y, t , we can compute the velocity $v_y = f(v_x)$ according to Eq. (50/4) or (48), because it was assumed that the limiting condition $f(v_x)$ is given. The value of p will be computed according to Eqs. (50/1, 2) if the velocities v_x and v_y are known. The boundary conditions will be given in each special case separately.

According to Eqs. (55/1, 3), (55/2, 3), we obtain the equations of characteristics which read

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x, y, v_x) &= v_x + \int \omega dy = \text{constant}, \\ \vartheta_2(x, y, v_x) &= v_x - \int \frac{\omega dx}{df/dv_x} = \text{constant}.\end{aligned}\quad (63)$$

The general integral is a functional relation between ϑ_1 and ϑ_2 which reads

$$F(\vartheta_1, \vartheta_2) = 0. \quad (64)$$

(Received January 14, 1958)

Druckstäbe geringsten Gewichts

L. Kirste, Wien

Mit 4 Textabbildungen

Zusammenfassung. Ausgehend von der Johnson-Formel für den plastischen Knickbereich wird der günstigste Querschnitt von Rundrohren, Sechskant- und Achtkantrohren als Funktion der dimensionslosen „Belastungsdichte“ ermittelt, die durch die geforderte Drucklast, die Systemlänge und die Materialkonstanten bestimmt ist. Die untersuchten Querschnittsformen sind ziemlich gleichwertig; eine Querschnittsverjüngung nach den Stabenden zu bringt nur wenig Gewinn.

Um die Druckfestigkeit σ_0 eines Baustoffs möglichst auszunützen, muß die Beanspruchung im plastischen Teil der Knicklinie erfolgen, für den die quadratische Johnson-Formel als gültig angenommen werden soll:

$$\sigma/\sigma_0 = 1 - \lambda^2 \frac{\sigma_0}{4\pi^2 E}.$$

Der Querschnitt des Stabes ist zur Erzielung einer kleinen Knickschlankheit λ soweit zu „spreizen“, als es die verlangte Beulsicherheit zuläßt. Für das Beulen im plastischen Bereich möge dieselbe Johnson-Formel, bezogen auf die ideelle Beulschlankheit $\lambda_B = \pi \sqrt{E/\sigma_B}$ gelten; die Beulsicherheit muß aber größer sein als die Knicksicherheit, weil sich eine örtliche Minderfestigkeit auf die Beullast voll auswirkt — wie das schwächste Glied einer Kette — auf die Knicklast jedoch nur zu einem Bruchteil, der um so kleiner ist, je weiter die Fehlstelle von der Längenmitte des Stabes entfernt ist. Wenn z. B. die Wandstärke in der Mitte des Stabes auf einer Strecke gleich einem Zehntel der Stablänge um 10% kleiner ist, so wird auch das Trägheitsmoment eines dünnwandigen Profils ungefähr um denselben Betrag kleiner, die Eulersche Knicklast aber nur um etwa 2%. Es ist daher ratsam, den Beulfaktor in der Johnson-Formel mit einem Koeffizienten $k > 1$ zu multiplizieren, der etwa zwischen 2 und 5 liegt:

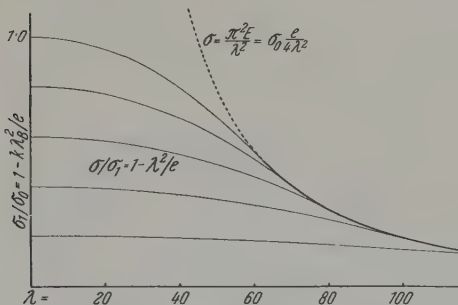


Abb. 1

$$\sigma_1/\sigma_0 = 1 - k \lambda_B^2 \frac{\sigma_0}{4\pi^2 E}.$$

Die so erhaltene Beulspannung, die für die Knickschlankheit Null gilt, kann nun als Ausgangsspannung für die kombinierte Beul- und Knickformel eingeführt werden (Abb. 1):

$$\begin{aligned}\sigma/\sigma_0 &= \left(1 - k \lambda_B^2 \frac{\sigma_0}{4\pi^2 E}\right) \\ &\quad \left\{1 - \lambda^2 \frac{\sigma_0}{4\pi^2 E} \left(1 - k \lambda_B^2 \frac{\sigma_0}{4\pi^2 E}\right)\right\}\end{aligned}$$

mit

$$1 - k \lambda_B^2 \frac{\sigma_0}{4\pi^2 E} = X \text{ und } 4\pi^2 E/\sigma_0 = e \text{ gibt dies: } \sigma/\sigma_0 = X \left(1 - \frac{\lambda^2 X}{e}\right).$$

Bei einem dünnwandigen Rundrohr (Abb. 2) ist der Trägheitsradius

$$i \sim \frac{d}{\sqrt{8}} \text{ also } \lambda \sim \frac{l\sqrt{8}}{d}$$

und die kritische Beulspannung

$$\sigma_B = 1.21 \frac{Et}{d}$$

$$\text{also } \lambda_B = 2.85 \sqrt{d/t} = \sqrt{e(1-X)/k}.$$

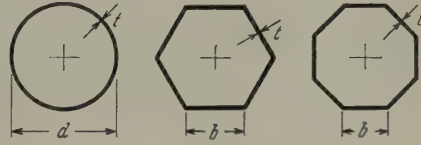


Abb. 2

Der Querschnitt ist

$$F \sim \pi dt = \frac{\pi \cdot 8 \cdot l^2 (2.85)^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_B^2} = \frac{204 l^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_B^2}.$$

Es folgt daraus die Bruchlast

$$P = F \cdot \sigma = \frac{204 l^2 \cdot k \cdot \sigma_0}{e(1-X) \lambda^2} X \left(1 - \lambda^2 \frac{X}{e}\right) = \frac{204 l^2 \cdot k \cdot \sigma_0}{e(1-X)} \left(\frac{X}{\lambda^2} - \frac{X^2}{e}\right).$$

Nun werde die „Belastungsdichte“ eingeführt, eine dimensionslose Größe, die bereits durch die gestellte Aufgabe — geforderte Bruchlast P bei gegebener Systemlänge l und Material von bekanntem σ_0 und E — bestimmt ist:

$$B = \frac{P}{\sigma_0 l^2} = \frac{204 k}{e(1-X)} \left(\frac{X}{\lambda^2} - \frac{X^2}{e}\right).$$

Jetzt läßt sich λ^2 durch B und X ausdrücken:

$$\lambda^2 = \frac{204 \cdot k \cdot e \cdot X}{B e^2 (1-X) + 204 \cdot k \cdot X^2}.$$

Dieser Wert in den Ausdruck für den Querschnitt eingesetzt gibt:

$$F = l^2 \left\{ \frac{B}{X} + \frac{204 \cdot k \cdot X}{e^2 (1-X)} \right\}.$$

Das Minimum wird erreicht für

$$\frac{dF}{dX} = 0 = -\frac{B}{X^2} + \frac{204 k}{e^2 (1-X)^2}; (204 k - B e^2) X^2 + 2 B e^2 X - B e^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann auf die Form gebracht werden

$$(p - q) X^2 + 2 q X - q = 0$$

und es folgt

$$X = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \frac{e \sqrt{B}}{\sqrt{204 k + e \sqrt{B}}} = \frac{Y}{1 + Y} \text{ wobei } Y = e \sqrt{\frac{B}{204 k}}.$$

Die günstigste Schlankheit wird damit

$$\lambda^2 = \frac{e X}{(1-X) B e^2 / 204 k + X^2} = e \frac{1 + Y}{Y (2 + Y)}.$$

Die nutzbare Spannung wird nun

$$\sigma = \sigma_0 \frac{Y}{1 + Y} \left(1 - \frac{1 + Y}{Y (2 + Y)} \cdot \frac{Y}{1 + Y}\right) = \frac{\sigma_0 Y}{2 + Y}$$

und der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{P}{\sigma_0} \left(1 + \frac{2}{Y}\right) = \frac{P}{\sigma_0} \left(1 + \frac{28.6}{e} \sqrt{k/B}\right).$$

Es kommt daher zum erforderlichen Querschnitt für reinen Druck noch eine Zusatzfläche $\frac{28.6 P}{e \cdot \sigma_0} \sqrt{k/B}$ hinzu, was für $Y = 2$ einer Verdopplung entspricht. Das günstigste Wandigkeitsverhältnis ist $d/t = \frac{e(1-X)}{14.3 \cdot k} = \frac{e}{14.3 \cdot k(1+Y)}$.

Bei einem dünnwandigen Sechseckquerschnitt (Abb. 2) mit der Seitenlänge b ist das Trägheitsmoment $J = 2.5 \cdot b^3 \cdot t$ und der Querschnitt $F = 6 \cdot b \cdot t$, also ist die Knickschlankheit $\lambda = 1.55 \cdot l/b$. Die kritische Beulspannung für die ebenen Seitenwände ist $\sigma_B = 3.61 \cdot E \cdot (t/b)^2$, daher die ideelle Beulschlankheit

$$\lambda_B = \pi \frac{b}{t \sqrt{3.61}} = 1.65 b/t.$$

Der Querschnitt läßt sich wiederum durch die beiden Schlankheiten ausdrücken:

$$F = \frac{9.3 l \cdot 1.65 \cdot 1.55 l}{\lambda \cdot \lambda_B \cdot \lambda} = \frac{23.8 l^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_B}.$$

Damit wird die Belastungsdichte

$$\frac{F \sigma}{\sigma_0 l^2} = \frac{23.8}{\lambda^2 \cdot \lambda_B} X \left(1 - \frac{\lambda^2 X}{e} \right) = \frac{23.8 \sqrt{k}}{\sqrt{e(1-X)}} \left(\frac{X}{\lambda^2} - \frac{X^2}{e} \right)$$

und es folgen daraus die Ausdrücke für die Knickschlankheit und den Querschnitt als Funktionen von X und von B :

$$\lambda^2 = \frac{e X}{X^2 + \frac{B e}{23.8} \sqrt{\frac{e(1-X)}{k}}}; \quad F = l^2 \left(\frac{23.8 \cdot \sqrt{k} \cdot X}{e \sqrt{e(1-X)}} + \frac{B}{X} \right).$$

Das Minimum wird erreicht für

$$\frac{dF}{dX} = 0 = \frac{23.8 \sqrt{k}}{e^{3/2}} \cdot \frac{1-X/2}{(1-X)^{3/2}} - \frac{B}{X^2}; \quad \frac{(1-X/2) X^2}{(1-X)^{3/2}} = \frac{B \cdot e^{3/2}}{23.8 \sqrt{k}} = Z.$$

Daraus muß jetzt X in Abhängigkeit von B , e und k zahlenmäßig ermittelt werden, was mit Hilfe der am Schluß angeführten Tabelle geschehen kann, die X als Funktion von Z angibt. Damit ergeben sich dann alle wichtigen Größen in geschlossener Form:

$$\lambda = \sqrt{\frac{e(1-X)}{X \left(2 - \frac{3X}{2} \right)}}; \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{e(1-X)}{k}}; \quad b/t = 0.605 \sqrt{\frac{e(1-X)}{k}};$$

$$\sigma = \sigma_0 X \left(1 - \frac{1-X}{2 - \frac{3X}{2}} \right) = \sigma_0 \frac{X(1-X/2)}{2 - \frac{3X}{2}}.$$

Bei einem Achteckquerschnitt gibt der gleiche Rechnungsgang die folgenden Werte: $J = 6.153 \cdot b^3 \cdot t$; $F = 8 \cdot b \cdot t$; $i = 0.877 \cdot b$; $\lambda = 1.14 \cdot l/b$.

$$F = \frac{17.15 l^2}{\lambda^2 \cdot \lambda_B}; \quad Z = \frac{B \cdot e^{3/2}}{17.15 \sqrt{k}}.$$

Um nun einen direkten Vergleich zwischen Rundrohr, Sechskant- und Achteckrohr zu ermöglichen, sind in Abb. 3 die entsprechenden Kurven von σ/σ_0 über der Belastungsdichte aufgetragen, wobei jedesmal die gleichen Werte von σ_0 , E und k gewählt wurden.

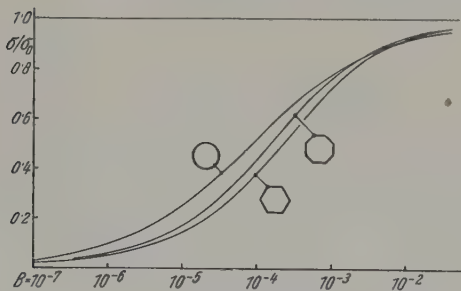


Abb. 3

Zur Abgrenzung des praktisch in Betracht kommenden Bereichs wurden folgende Extremwerte in Betracht gezogen:

σ_0 für Stahl	4000 bis 12 000 kg/cm ²	$E = 2,100\,000$
σ_0 für Leichtmetall	3500 bis 6 000	700 000
$e = 4 \cdot \pi^2 \cdot E / \sigma_0$	4600 bis 20 700	
k	2 bis 5	
$e^{3/2} / 23 \cdot 8 \sqrt{k}$	$\sim 10^4$ bis 10^5	
P	100 bis 100 000 kg	
l	50 bis 300 cm	
B	$\sim 10^{-7}$ bis 10^{-3}	
Z	10^{-3} bis 10^{-2}	

Als Beispiel wurden Rohre aus Leichtmetall gewählt, mit den Werten $\sigma_0 = 4500$; $E = 700\,000$; $k = 4$. Es folgt daraus: $e = 6150$; $Y = 216 \sqrt{B}$; $Z \sim 10\,000 \cdot B$. Man sieht die Überlegenheit des Rundrohrs, dessen σ/σ_0 von den Polygonrohren erst bei sehr großen Werten von B erreicht wird. Eine Vermehrung der Seitenzahl über acht hinaus käme nicht in Frage, weil dann die Kantenwinkel so stumpf wären, daß sie selbst einknicken würden und das Rohr praktisch wie ein Rundrohr von derselben Wandstärke beulen würde.

Z	X	Z	X	Z	X	Z	X	Z	X
0·001	0·031	0·010	0·095	0·10	0·268	1·0	0·600	10	0·877
002	044	020	131	20	353	2·0	704	20	919
004	061	040	180	40	456	4·0	792	40	948
006	074	060	216	60	519	6·0	835	60	960
008	085	080	244	80	565	8·0	859	80	967
0·010	095	0·100	268	1·00	600	10·0	877	100	971

Eine weitere Gewichtsersparnis läßt sich dadurch erzielen, daß man den Querschnitt nach den Enden zu verjüngt. Blasius¹ hat diese Aufgabe als Variationsproblem behandelt und das günstigste Längsprofil unter der Annahme geometrisch ähnlicher Profile ermittelt, was bei Hohlquerschnitten auch eine proportionale Abnahme der Wandstärke bedingt. Man kommt auf das gleiche Ergebnis, wenn man den Knickstab als „Körper gleicher Biegungsfestigkeit“ betrachtet, so daß in allen Querschnitten die gleiche Biegunsspannung erreicht wird, unter Vernachlässigung der reinen Druckspannung. Bezeichnet f die Ordinate der Biegunslinie in Stabmitte, F_0 den Querschnitt, J_0 das Trägheitsmoment und a_0 die halbe Profildicke daselbst, ferner n den linearen Verjüngungsfaktor, so ist bei vollkommen geometrisch ähnlichem Querschnittsverlauf im Abstand x von Stabmitte

$$F = F_0 \cdot n^2; \quad J = J_0 \cdot n^4; \quad a = a_0 \cdot n.$$

Ist y die Ordinate der Biegunslinie an der Stelle x , so folgt aus der Bedingung konstanter Biegunsspannung

$$\sigma = \frac{P \cdot y}{J/a} = \frac{P \cdot f}{J_0/a_0} = \frac{P \cdot y \cdot a_0}{J_0 \cdot n^3}; \quad \frac{y}{f} = n^3.$$

Die Biegunsgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{P \cdot f}{E J_0 n^4} \cdot \frac{y}{f} = - \frac{P f}{E J_0} \left(\frac{y}{f} \right)^{-1/3}$$

¹ H. Blasius: Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch. Z. für Mathematik und Physik 1913, 62. Band, S. 182–197.

liefert durch Integration zuerst

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3 \frac{P f^2}{E J_0} \left[1 - \left(\frac{y}{f}\right)^{2/3}\right]$$

und dann

$$x = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{E J_0}{3 P}} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (y/f)^{2/3}}}.$$

Setzt man $(y/f)^{2/3} = \sin^2 \varphi$, so erhält man die Gleichung des Längsprofils in der Form

$$x = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{E J_0}{P}} (2\varphi - \sin 2\varphi) + C; \quad \varphi = \arcsin n$$

$$x/l = \frac{1}{\pi} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right).$$

Daraus folgt $l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3 E J_0}{P}}$ und die Knicklast $P = \frac{3}{4} \frac{\pi^2 E J_0}{l^2}.$

Das Volumen des Stabes ist

$$V = \int_0^l F_0 \cdot n^2 \cdot dx = \frac{F_0 l}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin^4 \varphi \cdot d\varphi = \frac{3}{4} \cdot F_0 l,$$

also wäre sowohl die Knicklast als auch das Gewicht des verjüngten Stabes $3/4$ von dem des Stabes mit konstantem Querschnitt, der Gewinn demnach anscheinend illusorisch. Das ist jedoch ein Trugschluß, denn die konstruktive Aufgabe besteht darin, jenen Querschnittsverlauf zu ermitteln, der für eine vorgeschriebene Knicklast das kleinste Volumen ergibt. Man muß daher zwei Stäbe gleicher Knicklast miteinander vergleichen. Bezeichnet der Index „1“ den Stab mit konstantem Querschnitt, so gilt offenbar

$$\frac{3}{4} \cdot J_0 = J_1; \quad \frac{3}{4} = p^4; \quad F_1 = F_0 \cdot p^2; \quad V_0/V_1 = p^4/p^2 = \sqrt{3/4} = 0.8660.$$

Es ergibt sich daher ein Gewinn von rund 13%. Blasius hat zwei Stäbe mit gleichem Volumen verglichen, was einen Gewinn an Knicklast von 41% ergibt, aber der konstruktiven Forderung nicht entsprechen würde.

Besonders vorteilhaft für die Ausführung scheint die Annahme konstanter Wandstärke, weil dann die Herstellung aus Blech möglich ist. Bei kreisförmigem oder annähernd ellipsenförmigem Hohlquerschnitt ist dann die kritische Beullast über die ganze Stablänge konstant, nämlich proportional dem Quadrat der Wandstärke, unabhängig von der Profilgröße. Die Bedingung konstanter Biegungsspannung lautet jetzt

$$F = F_0 \cdot n; \quad J = J_0 \cdot n^3; \quad y/f = n^2$$

und die weitere Rechnung ergibt, ähnlich wie vorhin

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P f}{E J_0} \left(\frac{y}{f}\right)^{-1/2}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4 \frac{P f^2}{E J_0} \left[1 - \left(\frac{y}{f}\right)^{1/2}\right]$$

$$x/l = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos^3 \varphi; \quad \varphi = \arcsin \sqrt{n}$$

$$P = \frac{64}{9} \cdot \frac{E J_0}{l^2} = 0.7205 \frac{\pi^2 E J_0}{l^2}; \quad V = \frac{4}{5} F_0 l.$$

Vergleicht man wiederum zwei Stäbe gleicher Knicklast, so ist $p^3 = 0.7205$ und das Volumsverhältnis

$$V_0/V_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{p} = 0.8924.$$

Der Gewinn ist hier etwa 11%. Die den beiden Annahmen entsprechenden Längsprofile sind in Abb. 4 dargestellt. Die geringe Gewichtsersparnis durch Querschnittsverjüngung wiegt die Schwierigkeiten der Herstellung und des Zusammenbaus mit anderen Konstruktionsteilen im allgemeinen nicht auf.

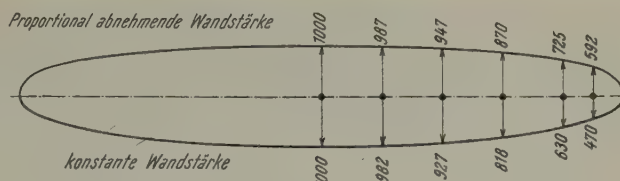


Abb. 4

(Eingegangen am 4. April 1958)

(Mitteilung aus der Physikalischen Forschungsabteilung der Österreichischen Stickstoffwerke A. G., Linz a. d. Donau)

Parallelstromrekuperatoren mit temperaturabhängiger Wärmedurchgangszahl

Von A. Huber, Linz a. d. D.

Mit 1 Textabbildung

Zusammenfassung. Bei großen Unterschieden zwischen den Ein- und Ausgangstemperaturen der beiden Gase in einem Parallelstromrekuperator kann sich der k -Wert mit der Temperatur so stark ändern, daß man ihn nicht mehr als konstant betrachten darf, wenn man den Temperaturverlauf genauer zu kennen wünscht. Für den Gegenstromrekuperator wird die bei allen Gegenstromprozessen auftretende Schwierigkeit überwunden, die davon herrührt, daß die Eingangswerte der Temperaturen für das eine bzw. für das andere Ende vorgeschrieben sind. Ferner wird die Berechnung der Gastemperaturen für eine plötzliche Änderung des k -Wertes gezeigt.

In die Differentialgleichungen, denen irgendwelche Größen X , Y ... als Funktionen der Zeit und der räumlichen Koordinaten genügen, treten Stoffwerte und andere „Konstanten“ ein, die meist selber Funktionen der gesuchten Größen X , Y ... sind, die man aber näherungsweise durch konstante Mittelwerte ersetzt. Der dadurch entstehende Fehler fällt um so weniger ins Gewicht, je kleiner die Intervalle sind, in denen die Größen X , Y ... variieren. Ändern sich aber innerhalb des in Betracht kommenden Bereiches der unabhängigen Variablen (Zeit, räumliche Koordinaten) die X , Y ... sehr stark, dann muß man die von ihnen abhängigen Stoffwerte und übrigen „Konstanten“ durch möglichst einfache Funktionen der X , Y ... approximieren, wodurch aber die Linearität der Differentialgleichungen verlorengehen und die Erfüllung der vorgeschriebenen Randbedingungen außerordentlich erschwert werden kann.

Ein solcher Fall liegt vor, wenn sich die Temperaturen der beiden Gase zwischen den Enden eines Rekuperators um mehrere hundert Grade ändern, so daß die Wärmedurchgangszahl k nicht mehr als konstant betrachtet werden darf, wenn man den Temperaturverlauf der Gase entlang des Rekuperators genauer zu kennen wünscht. Es soll daher zunächst untersucht werden, wie sich der k -Wert mit den Gastemperaturen ändert, wobei sich ein grundsätzlicher Unterschied zwischen Gegen- und Gleichstrom ergeben wird. Für eine lineare Approximation von k als Funktion der Temperatur des heißen Gases werden die Differentialgleichungen des Wärmeüberganges integriert, wobei sich für den Gegenstromrekuperator die für alle Gegenstromprozesse charakteristische Schwierigkeit bei der Erfüllung der Randbedingungen ergibt, die hier jedoch noch leicht überwunden werden kann. Auf eine ähnliche Weise wird auch der Fall erledigt, daß sich für einen Abschnitt durch Einbauten in die Rohre die Übertragungsfläche sprunghaft ändert. Schließlich wird an einem der Praxis entnommenen Beispiel der Unterschied der Temperaturverläufe für ein temperaturabhängiges k und einen konstanten Mittelwert gezeigt.

Die Abhängigkeit der Wärmedurchgangszahl von den Gastemperaturen

Sind α_1 und α_2 die Wärmeübergangszahlen und faßt man in ε die von der Rohrwand und der auf ihr etwa liegenden Rußschicht herrührenden Wärmewiderstände zusammen, so ist die Wärmedurchgangszahl k definiert durch

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \varepsilon, \quad (1)$$

wobei sich die Indices 1 und 2 auf das heiße bzw. auf das zu erwärmende Gas beziehen. Mit der Wärmeleitfähigkeit des Gases λ und dem thermischen Durchmesser d des Rohres gilt bei turbulenter Strömung allgemein:

$$\alpha = c \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot Pr^m \cdot Re^n, \quad (2)$$

wobei c eine Konstante und die Exponenten m und n echte Brüche sind. Da für Gase $Pr \doteq 0.7$ und $m \doteq 0.4$, so wird $Pr^m \doteq 0.9$, kann also als konstant betrachtet werden. Wie aus den einschlägigen Tabellen zu ersehen ist, kann in linearer Annäherung $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot T$ ($\lambda_2 > 0$; $T^\circ \text{C}$) gesetzt werden, und dies gilt auch für Gasgemische, wie z. B. aus der Formel von A. L. Lindsay und S. A. Bromley hervorgeht.

Bei der Bildung der Reynoldszahl hat man zu beachten, daß infolge der durch die steigende Temperatur bewirkten Ausdehnung des Gases die lineare Geschwindigkeit $u = c_1 \cdot \Theta$ ($\Theta^\circ \text{K}$) und ebenso auch seine kinematische Zähigkeit $\nu = c_2 \cdot \Theta \cdot \eta$, wobei auch die dynamische Zähigkeit η mit der Temperatur ungefähr linear ansteigt. Es wird darnach $Re = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{c_3}{\eta}$, also wenn auch $\eta \doteq m_1 + m_2 \cdot T$ ($m_2 > 0$) gesetzt und die Entwicklung von $(m_1 + m_2 \cdot T)^{-n}$ mit dem linearen Gliede abgebrochen wird:

$$\alpha \doteq \alpha_1 + \alpha_2 \cdot T,$$

wobei $\alpha_2 > 0$, also α mit wachsendem T zunimmt.

Nach (1) müssen zur Bildung von k zum selben Querschnitt gehörige Werte von α_1 und α_2 kombiniert werden, woraus folgt, daß bei Gleichstrom der k -Wert weniger stark mit der Temperatur variiert als bei Gegenstrom. Im ersten Falle stehen nämlich abnehmenden Temperaturen T_1 zunehmende Temperaturen T_2 gegenüber, es werden also, wenn man zunächst von dem Glied ε absieht, zu wachsenden Werten $1/\alpha_1$ abnehmende Werte $1/\alpha_2$ addiert, während bei Gegenstrom T_1 und T_2 sich im gleichen Sinn ändern, so daß mit abnehmendem T_1 zu einem wachsenden $1/\alpha_1$ ein ebenfalls wachsendes $1/\alpha_2$ addiert wird, womit sich also nun $1/k$ stärker ändern wird als im ersten Fall.

Sind W_1 und W_2 die stündlichen Wasserwerte der beiden Gasströme und T_1' , T_2' die Eingangstemperaturen bei Gleichstrom, so können aus der Beziehung $(T_1' - T_1) \cdot W_1 = (T_2 - T_2') \cdot W_2$ leicht zusammengehörige Wertepaare T_1 und T_2 zur Berechnung zusammengehöriger α_1 und α_2 gefunden werden. Bei Gegenstrom jedoch sind die Eingangstemperaturen der Gase für das eine bzw. für das andere Ende des Rekuperators vorgeschrieben, so daß man nun nicht mehr zusammengehörige Wertepaare T_1 und T_2 von vornherein angeben und daher auch keine zusammengehörige Wertepaare α_1 und α_2 berechnen kann. Diese bereits hier auftretende, für Gegenstromprozesse charakteristische Schwierigkeit, die später noch erörtert werden soll, läßt sich vorläufig nur dadurch umgehen, daß man $T_1 - T_2 = C$ setzt und für die Konstante C auf Grund von Betriebserfahrungen einen geeigneten Wert annimmt. Sollten die auf Grund dieser Annahme gefundenen Temperaturen keine nahezu konstante Differenz gleich C ergeben, so müßten die α_1 und α_2 neu gebildet und die Rechnung wiederholt werden.

Neben dem bisher erörterten konvektiven Wärmeübergang ist bei mehratomigen Gasen noch der durch Strahlung vermittelte in bekannter Weise zu berücksichtigen. Dieser fällt um so stärker ins Gewicht, je heißer das Gas ist, und die entsprechenden α -Werte können leicht über 20% der konvektiven α -Werte erreichen, was auf ein weiteres Anwachsen der Wärmedurchgangszahl mit steigender Temperatur hinauskommt. Bei kleinen Gasgeschwindigkeiten und sehr hohen Temperaturen kann sogar der Strahlungsanteil von α erheblich größer sein als der konvektive.

Bleibt ε entlang des Rekuperators konstant, so hat es auf das oben erwähnte Verhalten von k offenbar keinen Einfluß. Wenn jedoch, wie sich in einem Falle aus der Praxis gezeigt hat, am kalten Ende eines Gegenstromrekuperators hauptsächlich infolge Thermodiffusion mehr Ruß abgelagert wird als am heißen Ende, so wird auch ε in der Nähe des kalten Endes größer, also k selbst dort kleiner werden und somit infolge der Verrußung mit wachsender Temperatur noch stärker ansteigen.

Es ist klar, daß sich der Einfluß von ε auf den Verlauf von k nur auf Grund von Betriebserfahrungen grob abschätzen läßt und seine Berücksichtigung eine Abhängigkeit des k -Wertes von der Abszisse nach sich ziehen würde. Da nämlich ε nur von der vom heißen Ende an gerechneten Übertragungsfläche f abhängt, müßte man setzen:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1(T_1)} + \frac{1}{\alpha_2(T_1)} + \varepsilon(f). \quad (1')$$

Ein solches $k(T_1, f)$ würde aber praktisch nicht zu rechtfertigenden Schwierigkeiten für die Integration der Differentialgleichungen des Wärmeüberganges nach sich ziehen. Man wird daher auf Grund von Betriebserfahrungen f provisorisch durch eine lineare Funktion von T_1 , also $\varepsilon(f)$ durch $\varepsilon(T_1)$ ersetzen, so daß k eine Funktion von T_1 allein wird. Für diese Funktion wird man den Ansatz

$$k(T_1) = a \cdot (T_1 + b) \quad (3)$$

machen und die Koeffizienten a und b durch lineare Ausgleichung bestimmen, nachdem man für einige Werte von T_1 aus dem vermutlich in Frage kommenden Intervall nach (1') die entsprechenden Werte von $k(T_1)$ berechnet hat.

Um die Beanspruchung der Rohre herabzusetzen, versucht man den Wärmeübergang durch eine Vergrößerung der Heizfläche f am heißen Ende zu verbessern, indem man in die Rohre auf eine entsprechende Länge dünne radiale Lamellen einbaut. Da aber für die Wärmeübertragung das Produkt $k \cdot f$ maßgebend ist, so kann man die Wirkung dieser Lamellen rechnerisch auch durch eine Vergrößerung von k erfassen, so daß man also k nicht nur als Funktion der Temperatur, sondern auch der in der Strömungsrichtung gemessenen Abszisse zu betrachten hat, die aber hier unstetig ist.

Integration der Differentialgleichungen des Wärmeüberganges

Unter der Annahme, daß die Wärmeübertragungsfläche in jedem Querschnitt des Rekuperators denselben Umfang besitzt, können wir diese Fläche selber als Abszisse benutzen, womit wegen (3) die Differentialgleichungen für den Wärmeübergang werden:

$$W_1 \cdot dT_1 = \mp W_2 \cdot dT_2 = -a \cdot (T_1 + b) \cdot (T_1 - T_2) \cdot df. \quad (4)$$

Dabei bezieht sich \mp auf Gleich- bzw. auf Gegenstrom und f wird in der Richtung der abnehmenden Temperatur T_1 gerechnet.

Mit der Abkürzung $w = \mp W_1/W_2$ ergibt sich zunächst aus (4) die bereits erwähnte Beziehung

$$w \cdot (T_1 - T_1') = T_2 - T_2', \quad (5)$$

wobei T_1' und T_2' etwa die Gastemperaturen am heißen Ende sein sollen. Daraus folgt

$$T_1(f) - T_2(f) = (1 - w) \cdot \left[T_1(f) + \frac{w \cdot T_1' - T_2'}{1 - w} \right] = A \cdot [T_1(f) + B], \quad (5')$$

womit T_2 aus (4) eliminiert werden kann. Dazu müssen allerdings $T_1(0) = T_1'$ und $T_2(0) = T_2'$ gegeben sein, was aber nur bei Gleichstrom der Fall ist. Bei Gegenstrom müssen wir B zunächst als Parameter betrachten, dessen Wert erst aus der Bedingung $T_2(F) = T_2''$ bestimmt werden kann, wozu die Kenntnis des allgemeinen Integrals der Gleichung erforderlich ist, die sich aus den beiden äußeren Gliedern von (4) ergibt, nämlich:

$$\frac{dT_1}{df} = -p \cdot (T_1 + b) \cdot (T_1 + B) \quad (4')$$

mit

$$p = \frac{a \cdot A}{W_1} = \frac{a}{W_1} \cdot \left(1 \pm \frac{W_1}{W_2} \right) = a \cdot \left(\frac{1}{W_1} \pm \frac{1}{W_2} \right). \quad (6)$$

Ist insbesondere bei Gegenstrom $W_1 = W_2$, so wird $w = 1$ und nach (5') $T_1 - T_2 = T_1' - T_2'$, während sich (4') auf

$$\frac{dT_1}{df} = -a \cdot (T_1 + b) \cdot (T_1' - T_2')$$

reduziert, doch wollen wir diesen einfachen Sonderfall sowie auch den Fall des Gleichstroms von den weiteren Erörterungen ausschließen.

Mit der Anfangsbedingung $T_1(0) = T_1'$ liefert die Integration von (4'):

$$\frac{T_1 + b}{T_1 + B} = \frac{T_1' + b}{T_1' + B} \cdot \exp[-p \cdot (B - b) \cdot f] = E(f; B) \quad (7)$$

oder

$$T_1(f) = \frac{B \cdot E(f; B) - b}{1 - E(f; B)}. \quad (7')$$

Wie erwähnt, ist für Gleichstrom B durch (5') gegeben, für Gegenstrom aber muß B erst aus der zweiten Randbedingung $T_2(F) = T_2''$ ermittelt werden, um nach (7') den Temperaturverlauf $T_1(f)$ berechnen zu können. Dazu ersetzen wir $T_1(f)$ in (5') durch (7') und erhalten so für $f = F$ die folgende transzendente Gleichung für B :

$$T_2(F) = T_2'' = (1 - A) \cdot \frac{B \cdot E(F; B) - b}{1 - E(F; B)} - AB = \frac{B \cdot [E(F; B) - A] - b(1 - A)}{1 - E(F; B)}, \quad (8)$$

deren numerische Auflösung weniger mühsam ist als es scheint. Mit dem so gefundenen Wert des Parameters B kann man nun nach (7') den Temperaturverlauf $T_1(f)$ und damit nach (5') schließlich auch $T_2(f)$ berechnen.

Einfluß einer Unstetigkeit der Wärmedurchgangszahl auf die Gastemperaturen

Wie bereits erwähnt wurde, kann eine Änderung von f auch durch eine Änderung von k ersetzt werden, so daß k dann nicht nur von T_1 , sondern auch von f abhängt, wodurch die Integration der Wärmeübergangsgleichungen erheblich erschwert wird. Wir beschränken uns auf den praktisch wichtigen Fall, daß k bei $f = \bar{f}$ unstetig wird, setzen also

$$k = q \cdot a \cdot (T_1 + b),$$

wobei $q > 1$ für $0 < f < \bar{f}$, aber $q = 1$ für $\bar{f} < f < F$. Es soll also in der Nähe des heißen Endes infolge der in die Rohre eingebauten Lamellen k plötzlich auf das q -fache jenes

Betrages springen, der ohne Lamellen dort vorhanden wäre. An Stelle der Gleichung (4') tritt nun die Gleichung

$$\frac{dT_1}{df} = -q \cdot p \cdot (T_1 + b) \cdot (T_1 + B),$$

deren rechte Seite für $f = \bar{f}$ wegen der Unstetigkeit des Faktors q selber unstetig ist. Die hier vorliegenden analytischen Schwierigkeiten wollen wir durch die physikalisch naheliegende Forderung beseitigen, daß $T_1(f)$ auch für $f = \bar{f}$ stetig sein soll, also lim

$T_1(f) = \bar{T}_1$, während natürlich die T_1 - und ebenso auch die T_2 -Kurve für $f = \bar{f}$ einen Knick aufweisen müssen. Um die zur Bestimmung des Parameters B , dessen Wert wegen (5') von k ja explizit gar nicht abhängt, erforderliche Gleichung zu erhalten, bilden wir das Integral (7), indem wir zuerst von $f = 0$ mit $T_1(0) = T_1'$ ausgehen und p durch $\bar{p} = q \cdot p$ ersetzen und dann von $f = \bar{f}$ mit $T_1(\bar{f}) = \bar{T}_1$ ausgehen. Wir erhalten so die beiden Integrale:

$$\begin{aligned} \frac{T_1 + b}{T_1 + B} &= \frac{T_1' + b}{T_1' + B} \cdot \exp[-\bar{p} \cdot (B - b) \cdot f] \dots \dots \dots 0 < f < \bar{f} \\ \frac{T_1 + b}{T_1 + B} &= \frac{\bar{T}_1 + b}{\bar{T}_1 + B} \cdot \exp[-p \cdot (B - b) \cdot (f - \bar{f})] \dots \bar{f} < f < F. \end{aligned}$$

Setzt man in der ersten Gleichung $f = \bar{f}$, so daß links T_1 in \bar{T}_1 übergeht, in der zweiten Gleichung $f = F$, so daß links T_1 in T_1'' übergeht, und multipliziert man darauf beide Gleichungen, so fällt \bar{T}_1 heraus und es ergibt sich:

$$\frac{T_1'' + b}{T_1'' + B} = \frac{T_1' + b}{T_1' + B} \cdot \exp\{- (B - b) \cdot [\bar{p} \cdot \bar{f} + p \cdot (F - \bar{f})]\} = \bar{E}(F; B) \quad (9)$$

oder:

$$T_1'' = \frac{B \cdot \bar{E}(F; B) - b}{1 - \bar{E}(F; B)}. \quad (10)$$

Indem man diesen Ausdruck für T_1'' in die mit $f = F$ gebildete Gleichung (5') einsetzt, erhält man die gesuchte transzendente Gleichung für B , die sich von (8) nur dadurch unterscheidet, daß \bar{E} an Stelle von E steht.

Ein Beispiel.

1. In einem 12 m langen Gegenstromrekuperator mit der Heizfläche $F = 310 \text{ m}^2$ soll ein mit $T_1' = 900^\circ \text{C}$ und $W_1 = 3700 \text{ kcal/h}^\circ \text{C}$ eintretendes Gas ein am anderen Ende mit $T_2'' = 70^\circ \text{C}$ und $W_2 = 3500 \text{ kcal/h}^\circ \text{C}$ eintretendes Gas erwärmen. Nach den im ersten Abschnitt skizzierten Betrachtungen habe sich mit der vorläufigen Annahme $T_1 - T_2 = 250^\circ \text{C}$ ergeben:

$$k(T_1) = 0.024 \cdot (T_1 + 590) \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ \text{C},$$

also $a = 0.024 \text{ kcal/m}^2\text{h}$, $b = 590^\circ \text{C}$. Mit $w = 3700/3500 = 1.0571$ wird (5'):

$$T_1 - T_2 = -0.0571 \cdot (T_1 + B),$$

und mit $p = -\frac{0.024 \cdot 0.0571}{3700} = -3.7028 \cdot 10^{-7}$ ergibt (7):

$$E(F, B) = \frac{1392}{900 + B} \cdot \exp(1.148 \cdot 10^{-4} \cdot B).$$

Damit liefert (8) die folgende Gleichung für B :

$$70 = \frac{B \cdot [E(B) + 0.0571] - 623.69}{1 - E(B)}.$$

Wegen $T_1 - T_2 = 250^\circ \text{C}$ und $T_1 < 900^\circ \text{C}$ erhält man für die Wurzel die Schranken: $-5300 < B < -900$. Ein Iterationsverfahren führt nach wenigen Schritten zu $B = -4826$. Damit erhält man $E(f) = -0.3795 \exp(-0.002005 \cdot f)$,

$$T_1 = \frac{-4826 \cdot E(f) - 5900}{1 - E(f)} \text{ und } T_2 = 1,057 \cdot T_1 - 276.$$

Die darnach berechneten T_1 - und T_2 -Werte sind durch die voll ausgezogenen nach unten nur schwach konvexen Kurven des Diagramms dargestellt. Da $224 < T_1 - T_2 < 257$, so kann die für die Berechnung von $k(T_1)$ getroffene Annahme $T_1 - T_2 = 250^\circ \text{C}$ als hinlänglich genau erfüllt betrachtet werden und es braucht $k(T_1)$ nicht nochmals berechnet werden.

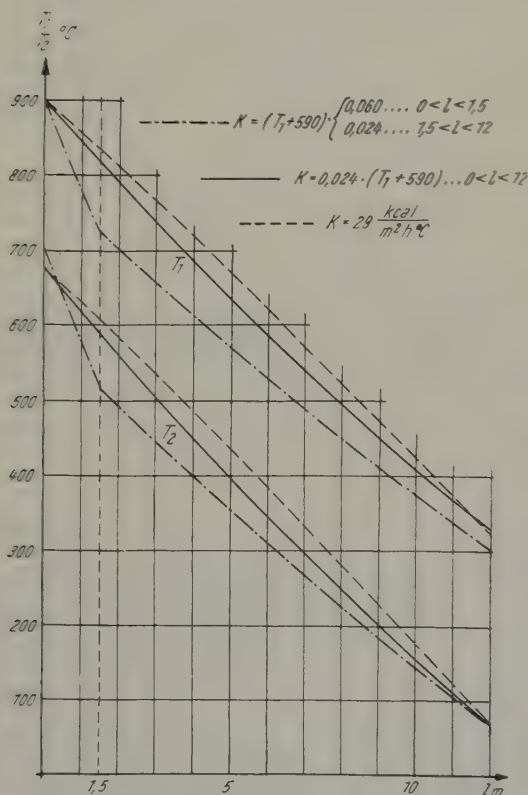


Abb. 1. Temperaturen in einem Gegenstromrekuperator für drei Annahmen der Wärmedurchgangszahl K .

Die damit berechneten T_1 - und T_2 -Werte sind durch die strichlierten nach unten schwach konkaven Kurven des Diagramms wiedergegeben. Sie sind höher als die vorher gefundenen und der größte Unterschied beträgt etwa 35°C in der Mitte, an den Enden dagegen bloß etwa 3°C .

3. Wir nehmen nun an, es seien in die Rohre Lamellen eingebaut, wodurch in einer Entfernung von $l = 1.5 \text{ m}$ vom heißen Ende an gerechnet, plötzlich das k auf das 2.5fache jenes Betrages ansteigt, den k ohne die Lamellen dort haben würde, wir setzen also $q = 2.5$ und $\bar{f} = 1/8 F$. Dann wird nach (9):

$$\bar{p} \cdot \bar{f} + p \cdot (F - \bar{f}) = \frac{19}{16} \cdot p \cdot F = 1.363 \cdot 10^{-4},$$

2. Nimmt man an Stelle von $k(T_1)$ den Mittelwert $\bar{k} = 29 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ \text{C}$, so folgt aus (4) und (5'):

$$W_1 \cdot dT_1 = -\bar{k} \cdot A (T_1 + B) \cdot df,$$

woraus man erhält:

$$\frac{T_1 + B}{T_1' + B} = \exp\left(-\bar{k} \cdot \frac{A}{W_1} \cdot f\right) = E_0(f)$$

oder:

$$T_1(f) = (T_1' + B) \cdot E_0(f) - B,$$

also:

$$T_1'' = T_1(F) = (T_1' + B) \cdot E_0(F) - B.$$

Damit ergibt (5') zunächst: $T_2'' = T_2(F) = (1 - A) \cdot T_1(F) - AB = w \cdot [(T_1' + B) \cdot E_0(F) - B] - (1 - w) \cdot B$, woraus

$$B = \frac{w \cdot T_1' \cdot E_0(F) - T_2''}{1 - w \cdot E_0(F)},$$

das man aber hier gar nicht berechnen braucht.

Mit den hier benützten Symbolen erhält man schließlich die bekannte Formel:

$$T_1' - T_1(f) = (T_1' - T_2'') \cdot \frac{1 - E_0(f)}{1 - w \cdot E_0(F)}.$$

$$\bar{E}(F; B) = \frac{1374.8}{900 + B} \cdot \exp(1.363 \cdot 10^{-4} \cdot B),$$

$$T_2'' = w \cdot T_1'' - AB = w \cdot \frac{B \cdot \bar{E} - b}{1 - \bar{E}} - AB = \frac{B(\bar{E} - A) - b(1 - A)}{1 - \bar{E}}$$

und die Gleichung für B :

$$B = \frac{70 \cdot [1 - \bar{E}(B)] + 623.70}{\bar{E}(B) + 0.0571}.$$

Sie ergibt $B = -4350$. Somit wird:

$$E_1(f) = -0.4319 \cdot \exp(-0.00475 \cdot f) \dots 0 < f < \frac{310}{8} \text{ und}$$

$$E_2(f) = -2.0316 \cdot \frac{\bar{T}_1 + 590}{4350 - \bar{T}_1} \cdot \exp(-0.001829 \cdot f) \text{ für } \frac{310}{8} < f < 310.$$

Aus:

$$T_1(f) = \frac{4350 \cdot E_1(f) + 590}{E_1(f) - 1} \text{ folgt für } f = \frac{1}{8}F \text{ insbesondere } \bar{T}_1 = 722.6^\circ \text{ C, womit die}$$

Berechnung von T_1 für $f > \frac{1}{8}F$ fortgesetzt werden kann.

Für T_2 folgt aus (5'):

$$T_2 = 1.057 \cdot T_1 - 248.$$

Das Ergebnis dieser Rechnungen zeigen die strichpunktierten Kurven des Diagramms, die bei $l = 1.5 \text{ m}$ einen starken Knick aufweisen. Die Temperaturen sind dort um 110° C bzw. um 90° C tiefer als im Falle $k = 29 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ \text{ C}$, während an den Enden die Unterschiede nur 23° C bzw. 26° C betragen.

Ich danke der Unternehmungsleitung der Österreichischen Stickstoffwerke A. G. für die mir erteilte Erlaubnis zur Veröffentlichung dieses Aufsatzes.

(Eingegangen am 6. Mai 1958)

Das Verfahren von Krylow-Bogoljubow zur Behandlung nichtlinearer Schwingungsprobleme

Von H. Scholz, Wien

Mit 2 Textabbildungen

Zusammenfassung. Ausgehend von der quasiharmonischen Schwingungsgleichung $\ddot{q} + \nu^2 q + \varepsilon f(q, \dot{q}) = 0$, für die N. Krylow und N. Bogoljubow¹ ein Ersatzsystem angegeben haben, werden durch Spezialisierung der nichtlinearen Funktion auf ein Polynom in q und \dot{q} gebrauchsfertige Näherungsformeln entwickelt, wobei diese speziell für den Fall eines Polynoms höchstens 5. Grades in q und \dot{q} ausführlich angegeben werden. An Hand eines konkreten Problems, das A. Weigand mittels elliptischer Funktionen exakt löste, wird die Leistungsfähigkeit der Krylow-Bogoljubowschen Näherung überprüft.

I. Prinzip der Methode¹

Die harmonische Schwingungsgleichung

$$\ddot{q} + \nu^2 q = 0 \tag{1}$$

¹ N. Krylow-N. Bogoljubow: Introduction to nonlinear mechanics: Princeton University Press. 1947.

hat die Lösung

$$q = a \sin \psi(t) \text{ mit } \psi(t) = \nu t + \varphi, \quad (2)$$

woraus als Schwingungsdauer folgt

$$T = \frac{2\pi}{\nu}. \quad (3)$$

Amplitude a und Phasenverschiebungswinkel φ hängen mit Anfangslage $q(0) = q_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}(0) = v_0$ in der bekannten Weise

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\nu} \sqrt{\nu^2 q_0^2 + v_0^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{\nu q_0}{v_0} \end{aligned} \quad (4)$$

zusammen.

Unter Berücksichtigung der obigen Ergebnisse sucht man nun Näherungslösungen harmonischen Charakters für die nichtlineare Gleichung

$$\ddot{q} + \nu^2 q + \varepsilon f(q, \dot{q}) = 0, \quad (5)$$

wo $\varepsilon > 0$ ein Maß für die Abweichung von $f(q, \dot{q})$ von $\nu^2 q$ ist, zu finden.

Ähnlich der Methode der Variation der Konstanten macht man den Ansatz

$$q = a(t) \sin \psi(t) \text{ mit } \psi(t) = \nu t + \varphi(t). \quad (6)$$

Dann ist

$$\dot{q} = \dot{a} \sin \psi + a(\nu + \dot{\varphi}) \cos \psi. \quad (7)$$

Man verlangt nun, daß (7) mit der Geschwindigkeit der harmonischen Schwingung, also mit

$$\dot{q} = a \nu \cos \psi$$

übereinstimmt. Daraus folgt

$$\dot{a} \sin \psi + a \dot{\varphi} \cos \psi = 0. \quad (8)$$

Mit (8) ist dann für (6)

$$\dot{q} = a(t) \nu \cos \psi(t), \quad (7a)$$

woraus folgt

$$\ddot{q} = \dot{a} \nu \cos \psi - a \nu (\nu + \dot{\varphi}) \sin \psi. \quad (9)$$

Setzt man nun (6), (7a) und (9) in (5) ein, so folgt

$$\dot{a} \cos \psi - a \dot{\varphi} \sin \psi = -\frac{\varepsilon}{\nu} f(a \sin \psi, a \nu \cos \psi). \quad (10)$$

(8) und (10) stellen ein lineares Gleichungssystem für a und $\dot{\varphi}$ dar. Es hat die Lösung

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\nu} f(a \sin \psi, a \nu \cos \psi) \cos \psi \\ \dot{\varphi} &= \frac{\varepsilon}{a \nu} f(a \sin \psi, a \nu \cos \psi) \sin \psi. \end{aligned} \quad (11)$$

Das System (11) ist ebenfalls nichtlinear. Um es wenigstens näherungsweise zu lösen, entwickelt man die rechten Seiten in Fouriersche Reihen und berücksichtigt in erster Näherung nur die Konstanten. Damit ergibt sich das Krylow-Bogoljubowsche Ersatzsystem

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \Phi, a \nu \cos \Phi) \cos \Phi d\Phi \\ \dot{\varphi} &= \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi a \nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \Phi, a \nu \cos \Phi) \sin \Phi d\Phi. \end{aligned} \quad (12)$$

Das System (12) ist zu lösen für die Anfangswerte

$$a(0) = a_0, \psi(0) = \psi_0.$$

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich für die konservativen Schwingungen

$$\ddot{q} + v^2 q + \varepsilon f(q) = 0. \quad (13)$$

Für diesen Fall ergibt sich das Ersatzsystem

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ \psi &= v t + \frac{\varepsilon t}{2\pi a_0 v} \int_0^{2\pi} f(a_0 \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi + \psi_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Es ist nämlich, falls $f(q)$ eindeutig ist,

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi = 0$$

und damit auch $\dot{a} = 0$, woraus (14) folgt.

II. Anwendung auf Polynome

Bei den praktisch wichtigen Schwingungsgleichungen der Form (5) ist die nicht-lineare Funktion im allgemeinen durch ein Polynom in q und \dot{q} hinreichend genau darzustellen.

Setzt man

$$f(q, \dot{q}) = \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N \alpha_{kl} q^k \dot{q}^l, \quad (15)$$

so ist nach (12)

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi v} \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N \alpha_{kl} a^{k+l} v^l \int_0^{2\pi} \sin^k \Phi \cos^{l+1} \Phi d\Phi \\ \dot{\psi} &= v + \frac{\varepsilon}{2\pi a v} \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N \alpha_{kl} a^{k+l} v^l \int_0^{2\pi} \sin^{k+1} \Phi \cos^l \Phi d\Phi. \end{aligned} \quad (16)$$

Das erste Integral ist nur für $k = 2m, l = 2n + 1$ von Null verschieden und das zweite nur für $k = 2r + 1, l = 2s$, so daß folgt

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon \sum_{m=0}^{m_1} \sum_{n=0}^{n_1} \beta_{2m, 2n+1} a^{2m+2n+1} = -\varepsilon a \sum_{q=0}^h \lambda_q a^{2q} \\ \dot{\psi} &= v + \varepsilon \sum_{r=0}^{r_1} \sum_{s=0}^{s_1} \gamma_{2r+1, 2s} a^{2r+2s} = v + \varepsilon \sum_{\sigma=0}^i \mu_{\sigma} a^{2\sigma} \end{aligned} \quad (17)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} h &= m_1 + n_1 \quad \lambda_q = \sum_{u=0}^q \beta_{2u, 2q-2u+1} \\ \beta_{2m, 2n+1} &= \alpha_{2m, 2n+1} \frac{v^{2n} (1; 2; m) (2n+2)!}{2^{2n+2} (2n+4; 2; m) (n+1)!^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} i &= r_1 + s_1 \quad \mu_{\sigma} = \sum_{\tau=0}^{\sigma} \gamma_{2\tau+1, 2\sigma-2\tau} \\ \gamma_{2r+1, 2s} &= \alpha_{2r+1, 2s} \frac{v^{2s-1} (1; 2; s) (2r+2)!}{2^{2r+2} (2r+4; 2; s) (r+1)!^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei ist $(m; d; v) = m(m+d)(m+2d)\dots[m+(v-1)d]$.

Aus (17) ergibt sich, daß nur jene Koeffizienten α_{kl} zur Bestimmung von \dot{a} und $\dot{\psi}$ etwas beitragen, für welche die Indexsumme $k + l$ ungerade ist, was in der Natur des Ansatzes (6) begründet ist.

Das System (17) ist nun für $a(0) = \alpha_0$ und $\psi(0) = \psi_0$ zu integrieren. Aus der ersten Differentialgleichung folgt zunächst mit

$$\begin{aligned} \lambda_h \neq 0 \quad \eta_j &= \frac{\lambda_j}{\lambda_h} \quad j = 0 \dots h \\ \dot{a} &= -\varepsilon \lambda_h a \sum_{j=0}^h \eta_j a^{2j} \end{aligned} \quad (20)$$

und durch Trennen der Veränderlichen

$$-\varepsilon \lambda_h \int dt = \int \frac{da}{a \sum_{j=0}^h \eta_j a^{2j}} = F(a). \quad (21)$$

Aus der Funktion $F(a)$, die sich nach Ausführen der angezeigten Integration im allgemeinen aus rationalen und transzendenten Funktionen in a zusammensetzt, ist a explizit darzustellen, was nur in speziellen Fällen elementar möglich ist, und zwar dann, wenn

$$1) \quad \sum_{j=0}^h \eta_j a^{2j} \equiv a^{2h} + \eta_0 \quad \text{und} \quad 2) \quad \sum_{j=0}^h \eta_j a^{2j} \equiv a^{2h} \quad \text{ist.}$$

Für diese beiden Fälle ist

$$1) \quad a = \frac{a_0 e^{-\varepsilon \lambda_0 t}}{\sqrt[2h]{1 - \frac{\lambda_h a_0^{2h}}{\lambda_0} (e^{-2h \varepsilon \lambda_0 t} - 1)}} \quad (\operatorname{sgn} \lambda_h \neq \operatorname{sgn} \lambda_0) \quad (22)$$

$$2) \quad a = \frac{a_0}{\sqrt[2h]{1 + 2h \varepsilon \lambda_h a_0^{2h} t}}. \quad (23)$$

Ist nun $a = a(t)$ bestimmt, dann folgt aus

$$\dot{\psi} = \nu + \varepsilon \mu_0 + \sum_{\sigma=1}^i \mu_\sigma a^{2\sigma}$$

durch Integration

$$\psi = (\nu + \varepsilon \mu_0) t + \sum_{\sigma=1}^i \mu_\sigma \int a^{2\sigma} dt. \quad (24)$$

In (24) ist nun (22) und (23) einzusetzen. Da diese allgemeine Formel unübersichtlich² (I 16. 12b) ist, soll darauf verzichtet werden, sie anzugeben. Für spezielle Werte von h und σ folgen die entsprechenden Formeln in Abschnitt III.

In (22) und (23) und damit auch in (24) treten transzendente und irrationale Funktionen auf, so daß es für die praktische Rechnung vorteilhaft ist, Näherungen $\bar{a}(t)$ und $\bar{\psi}(t)$ für die exakten Funktionen $a(t)$ und $\psi(t)$ zu kennen. Zu diesem Zweck werden $a(t)$ und $\psi(t)$ aus ihren Differentialgleichungen (17) in Taylorsche Reihen nach Potenzen von t entwickelt. Bricht man die Entwicklung von $a(t)$ nach t^2 ab, so genügt es, die entsprechende Darstellung von $\psi(t)$ mit t^3 abzurechnen, was seinen Grund in folgendem hat: Löst man die Differentialgleichung für $a(t)$ mittels des Picardschen Verfahrens, so stimmt die 2., 3., 4. Approximation bis zu Gliedern 2., 3., 4. Ordnung mit der Reihenentwicklung überein. Geht man nun mit der 2. Approximation $a_2(t)$ in die Differentialgleichung für $\psi(t)$ hinein, entwickelt nach Potenzen

² W. Gröbner-N. Hofreiter: Integraltafeln I, II. Wien: Springer. 1949, 1950.

von t und integriert, so zeigt sich, daß dieses $\psi_2(t)$ bis zu Gliedern 3. Ordnung mit der Reihenentwicklung übereinstimmt.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} P(a) &= -\varepsilon \sum_{q=0}^h \lambda_q a^{2q+1}, \quad P_0 = P(a_0), \quad \dot{P}_0 = \frac{dP(a)}{da} \bigg|_{a=a_0} \\ Q(a) &= \nu + \varepsilon \sum_{\sigma=0}^i \mu_\sigma a^{2\sigma}, \quad Q_0 = Q(a_0), \quad \dot{Q}_0 = \frac{dQ(a)}{da} \bigg|_{a=a_0} \end{aligned} \quad (25)$$

ergeben sich die Näherungen

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= a_0 + P_0 t + \frac{1}{2} P_0 \dot{P}_0 t^2 \\ \bar{\psi}(t) &= \psi_0 + Q_0 t + \frac{1}{2} \dot{Q}_0 P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_0 (\ddot{Q}_0 P_0 + \dot{Q}_0 \dot{P}_0) t^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Mittels (26) lassen sich auch jene Fälle behandeln, bei denen die explizite Darstellung von $a(t)$ aus (21) elementar nicht möglich ist.

Für konservative Schwingungen ergeben sich wesentliche Vereinfachungen. Hier macht man den Ansatz

$$f(q) = \sum_{k=0}^M \alpha_{k0} q^k \quad (27)$$

und erhält damit aus (14) nach Ausführung der Integration

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ \psi &= \left(\nu + \varepsilon \sum_{r=0}^{r_1} \alpha_{2r+1,0} \frac{(2r+2)!}{\nu \cdot 2^{2r+2} (r+1)!^2} a_0^{2r} \right) t + \psi_0, \end{aligned} \quad (28)$$

woraus sich unmittelbar die Näherungslösung

$$q = a_0 \sin \left[\left(\nu + \varepsilon \sum_{r=0}^{r_1} \alpha_{2r+1,0} \frac{(2r+2)!}{\nu \cdot 2^{2r+2} (r+1)!^2} a_0^{2r} \right) t + \psi_0 \right] \quad (29)$$

samt ihrer Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\nu + \varepsilon \sum_{r=0}^{r_1} \alpha_{2r+1,0} \frac{(2r+2)!}{\nu \cdot 2^{2r+2} (r+1)!^2} a_0^{2r}} \quad (30)$$

ergibt.

III. Anwendung auf Polynome in q und \dot{q} höchstens 5. Grades

Unter Berücksichtigung, daß $k+l$ ungerade ist, ergibt sich aus (5), (15) und (17) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \nu^2 q + \varepsilon (\alpha_{01} \dot{q} + \alpha_{03} \dot{q}^3 + \alpha_{05} \dot{q}^5 + \alpha_{21} q^2 \dot{q} + \alpha_{23} q^2 \dot{q}^3 + \alpha_{41} q^4 \dot{q} + \\ + \alpha_{10} q + \alpha_{30} q^3 + \alpha_{50} q^5 + \alpha_{12} q \dot{q}^2 + \alpha_{32} q^3 \dot{q}^2 + \alpha_{14} q \dot{q}^4) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

und ihr Ersatzsystem

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon a (\lambda_2 a^4 + \lambda_1 a^2 + \lambda_0) \\ \psi &= (\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon (\mu_1 J_1^h + \mu_2 J_2^h) + \text{const}, \quad J_\sigma^h = \int a^{2\sigma} dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Aus (18) und (19) folgt

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2} \alpha_{01} & \lambda_1 &= \frac{1}{8} (\alpha_{21} + 3 \alpha_{03} \nu^2) & \lambda_2 &= \frac{1}{16} (\alpha_{41} + \alpha_{23} \nu^2 + 5 \alpha_{05} \nu^4) \\ \mu_0 &= \frac{1}{2\nu} \alpha_{10} & \mu_1 &= \frac{1}{8\nu} (\alpha_{12} \nu^2 + 3 \alpha_{30}) & \mu_2 &= \frac{1}{16\nu} (\alpha_{14} \nu^4 + \alpha_{32} \nu^2 + 5 \alpha_{50}). \end{aligned} \quad (33)$$

Wie das Ersatzsystem (32) zeigt, wird die Form der Amplituden- und Argumentfunktionen von den sechs wegen dieser Eigenschaft so genannten „Diskriminanten“ (33) entscheidend beeinflußt. Diese sechs Zahlen kann man, wie (33) zeigt, in einfacher Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (31) berechnen. Je nach dem Verschwinden oder Nichtverschwinden der λ_2 , λ_1 und λ_0 lassen sich in (31) acht Klassen unterscheiden, für die sich durch Spezialisierung von (20), (22), (23), (24), (25) und (26) die folgenden Typen von Näherungslösungen samt ihren Näherungen ergeben.

A. $\lambda_2 = 0$

1. $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_0 = 0$

$$q = a_0 \sin [(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t + \psi_0].$$

2. $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_0 \neq 0$

$$q = a_0 e^{-\varepsilon \lambda_0 t} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \frac{\mu_1 a_0^2}{2 \lambda_0} (1 - e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t}) + \frac{\mu_2 a_0^4}{4 \lambda_0} (1 - e^{-4 \varepsilon \lambda_0 t}) + \psi_0 \right].$$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon \lambda_0 t + \frac{\varepsilon^2 \lambda_0^2}{2} t^2 \right\} \cdot \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \varepsilon^2 a_0^2 \lambda_0 (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \frac{2 \varepsilon^3 a_0^2 \lambda_0^2}{3} (4 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^3 + \psi_0 \right].$$

3. $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_0 = 0$

$$q = \frac{a_0}{\sqrt{1 + 2 \varepsilon \lambda_1 a_0^2 t}} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \frac{\mu_1}{2 \lambda_1} \log (1 + 2 \varepsilon \lambda_1 a_0^2 t) + \frac{\varepsilon \mu_2 a_0^4 t}{1 + 2 \varepsilon \lambda_1 a_0^2 t} + \psi_0 \right].$$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon \lambda_1 a_0^2 t + \frac{3 \varepsilon^2 \lambda_1^2 a_0^4}{2} t^2 \right\} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \varepsilon^2 a_0^4 \lambda_1 (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \frac{4 \varepsilon^3 a_0^6 \lambda_1^2}{3} (3 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^3 + \psi_0 \right].$$

4. $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq 0$ ($\operatorname{sgn} \lambda_1 \neq \operatorname{sgn} \lambda_0$)

$$q = \frac{a_0 e^{-\varepsilon \lambda_0 t}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_1 a_0^2}{\lambda_0} (e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t} - 1)}} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \frac{\lambda_1 \mu_1 - \lambda_0 \mu_2}{2 \lambda_1^2} \log \left\{ 1 - \frac{\lambda_1 a_0^2}{\lambda_0} (e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t} - 1) \right\} + \frac{\mu_2 a_0^2}{2 \lambda_1} \left\{ 1 - \frac{e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t}}{1 - \frac{\lambda_1 a_0^2}{\lambda_0} (e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t} - 1)} \right\} + \psi_0 \right].$$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon (\lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) t + \frac{\varepsilon^2}{2} (3 \lambda_1^2 a_0^4 + 4 \lambda_1 \lambda_0 a_0^2 + \lambda_0^2) t^2 \right\} \cdot \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \varepsilon^2 a_0^2 (\lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \frac{2 \varepsilon^3 a_0^2}{3} (\lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) \{ 2 \mu_2 a_0^2 (3 \lambda_1 a_0^2 + 2 \lambda_0) + \mu_1 (2 \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) \} t^3 + \psi_0 \right].$$

B. $\lambda_2 \neq 0$

1. $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0, \lambda_0 = 0$

$$q = \frac{a_0}{\sqrt[4]{1 + 4 \varepsilon \lambda_2 a_0^4 t}} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \frac{\mu_1}{2 \lambda_2 a_0^2} \{ \sqrt{1 + 4 \varepsilon \lambda_2 a_0^4 t} - 1 \} + \frac{\mu_2}{4 \lambda_2} \log (1 + 4 \varepsilon \lambda_2 a_0^4 t) + \psi_0 \right].$$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon \lambda_2 a_0^4 t + \frac{5 \varepsilon^2 \lambda_2^2 a_0^8}{2} t^2 \right\} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \varepsilon^2 a_0^6 \lambda_2 (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \frac{2 \varepsilon^3 a_0^{10} \lambda_2^2}{3} (8 \mu_2 a_0^2 + 3 \mu_1) t^3 + \psi_0 \right].$$

2. $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0, \lambda_0 \neq 0$ ($\text{sgn } \lambda_2 \neq \text{sgn } \lambda_0$)

$$q = \frac{a_0 e^{-\varepsilon \lambda_0 t}}{\sqrt[4]{1 - \frac{\lambda_2 a_0^4}{\lambda_0} (e^{-4 \varepsilon \lambda_0 t} - 1)}} \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \right. \\ \left. + \frac{\mu_1}{4 \sqrt{-\lambda_0 \lambda_2}} \log \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_2} + a_0^4 - 2 a_0^2 e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t} \left[a_0^2 e^{-2 \varepsilon \lambda_0 t} - \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_2} + a_0^4 (e^{-4 \varepsilon \lambda_0 t} - 1)} \right] \right| + \right. \\ \left. + \frac{\mu_2}{4 \lambda_2} \log \left\{ 1 - \frac{\lambda_2 a_0^4}{\lambda_0} (e^{-4 \varepsilon \lambda_0 t} - 1) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_1}{4 \sqrt{-\lambda_0 \lambda_2}} \log \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_2} - a_0^4 + 2 a_0^2 \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_2}} \right| + \psi_0 \right].$$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_0) t + \frac{\varepsilon^2}{2} (5 \lambda_2^2 a_0^8 + 6 \lambda_2 \lambda_0 a_0^4 + \lambda_0^2) t^2 \right\} \cdot \\ \cdot \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \varepsilon^2 a_0^2 (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_0) (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \right. \\ \left. + \frac{2 \varepsilon^3 a_0^2}{3} (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_0) \{ 4 \mu_2 a_0^2 (2 \lambda_2 a_0^4 + \lambda_0) + \mu_1 (3 \lambda_2 a_0^4 + \lambda_0) \} t^3 + \psi_0 \right].$$

3. $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_0 = 0$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon a_0^2 (\lambda_2 a_0^2 + \lambda_1) t + \frac{\varepsilon^2 a_0^4}{2} (5 \lambda_2^2 a_0^4 + 8 \lambda_2 \lambda_1 a_0^2 + 3 \lambda_1^2) t^2 \right\} \cdot \\ \cdot \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \varepsilon^2 a_0^4 (\lambda_2 a_0^2 + \lambda_1) (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \right. \\ \left. + \frac{2 \varepsilon^3 a_0^6}{3} (\lambda_2 a_0^2 + \lambda_1) \{ 2 \mu_2 a_0^2 (4 \lambda_2 a_0^2 + 3 \lambda_1) + \mu_1 (3 \lambda_2 a_0^2 + 2 \lambda_1) \} t^3 + \psi_0 \right].$$

4. $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_0 \neq 0$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \varepsilon (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) t + \frac{\varepsilon^2}{2} (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) (5 \lambda_2 a_0^4 + 3 \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) t^2 \right\} \cdot \\ \cdot \sin \left[(\nu + \varepsilon \mu_0) t + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1) t - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 a_0^2 (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) (2 \mu_2 a_0^2 + \mu_1) t^2 + \frac{2 \varepsilon^3 a_0^2}{3} (\lambda_2 a_0^4 + \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) \cdot \right. \\ \left. \cdot \{ 2 \mu_2 a_0^2 (4 \lambda_2 a_0^4 + 3 \lambda_1 a_0^2 + 2 \lambda_0) + \mu_1 (3 \lambda_2 a_0^4 + 2 \lambda_1 a_0^2 + \lambda_0) \} t^3 + \psi_0 \right].$$

Für die letzten beiden Klassen lassen sich nur die Näherungen nach (26) angeben, weil in diesen Fällen die explizite Darstellung von $a(t)$ nach (21) im allgemeinen elementar nicht möglich ist.

Für die oben angeführten Typen läßt sich im Falle A. 1. die Schwingungsdauer der Näherungslösung angeben, nämlich

$$T = \frac{2 \pi}{\nu + \varepsilon \mu_0 + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1)}, \quad (34)$$

während dies für A. 2. bis 4. und B. 1. bis 4. nur näherungsweise möglich ist. In diesen Fällen stimmt die Schwingungsdauer in erster Näherung mit (34) überein, also

$$\bar{T} = \frac{2 \pi}{\nu + \varepsilon \mu_0 + \varepsilon a_0^2 (\mu_2 a_0^2 + \mu_1)}. \quad (35)$$

Das Anfangswertproblem läßt sich näherungsweise unter Berücksichtigung von (6) und (7a) lösen. Nach (6) ist nämlich

$$q_0 = a(0) \sin \psi(0) = a_0 \sin \psi_0 \quad (36)$$

und nach (7a)

$$v_0 = a(0) v \cos \psi(0) = a_0 v \cos \psi_0, \quad (37)$$

woraus folgt

$$a_0 = \frac{1}{v} \sqrt{v^2 q_0^2 + v_0^2}$$

$$\psi_0 = \arctg \frac{v q_0}{v_0} \quad (38)$$

Mit A. 1. wird auch die konservative Schwingung (29) erfaßt. Setzt man hier $r_1 = 2$ und berücksichtigt (33), so folgt A. 1., setzt man in (31)

$$\alpha_{01} = \alpha_{03} = \alpha_{05} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{41} = \alpha_{12} = \alpha_{32} = \alpha_{14} = 0,$$

so ergibt sich einerseits (29) für $r_1 = 2$ und andererseits $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, woraus A. 1. folgt und gleichzeitig (30) mit (34) identisch wird.

IV. Beispiele zur Aufstellung der Näherungslösung

1. Van der Polsche Differentialgleichung.

$$\ddot{q} - \varepsilon(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$$

oder

$$\ddot{q} + q + \varepsilon(-\dot{q} + q^2\dot{q}) = 0.$$

Vergleich mit (31) und (33) liefert

$$v = 1, \lambda_0 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = \frac{1}{8}, \lambda_2 = 0, \text{ also A. 4.}$$

$$\mu_0 = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0,$$

daher

$$q = \frac{a_0 e^{\frac{\varepsilon}{2}t}}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2}{4}(e^{\varepsilon t} - 1)}} \sin(t + \psi_0)$$

$$\bar{q} = a_0 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{8}(a_0^2 - 4)t + \frac{\varepsilon^2}{128}(3a_0^4 - 16a_0^2 + 16)t^2 \right\} \sin(t + \psi_0).$$

2. Differentialgleichung eines nichtlinearen Regelsystems (man vergleiche³).

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \varepsilon(A\dot{q} + B\dot{q}^3 + C\dot{q}^2 q) = 0.$$

Vergleich mit (31) und (33) liefert

$$v = \omega, \lambda_0 = \frac{A}{2}, \lambda_1 = \frac{3\omega^2}{8}B, \lambda_2 = 0, \text{ also A. 4.}$$

$$\mu_0 = 0, \mu_1 = \frac{\omega}{8}C, \mu_2 = 0, \text{ daher}$$

$$q = \frac{a_0 e^{-\frac{A\varepsilon}{2}t}}{\sqrt{1 - \frac{3\omega^2 a_0^2 B}{4A}(e^{-A\varepsilon t} - 1)}} \sin \left[\omega t + \frac{C}{6\omega B} \log \left\{ 1 - \frac{3\omega^2 a_0^2 B}{4A}(e^{-A\varepsilon t} - 1) \right\} + \psi_0 \right].$$

Ein weiteres Beispiel findet sich in⁴.

³ H. Scholz: Kolloquium über Probleme der nichtlinearen Mechanik (Tagungsbericht). MTW-Mitteilungen, Jg. V, Nr. 3, 1958.

⁴ H. Scholz: Beiträge zum Krylow-Bogoljubowschen Näherungsverfahren für nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung. MTW-Mitteilungen, Jg. IV, Nr. 4, 1957.

V. Numerische Ergebnisse

A. Weigand^{5, 6} hat das in der Theorie der Fahrzeugfederung auftretende Schwingungsproblem

$$m x'' + c x (1 + \varepsilon x^2) = 0 \quad (39)$$

mit

$$x = x(\tau), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

mittels elliptischer Funktionen exakt gelöst.

Durch die Transformation

$$t = \sqrt{\frac{c}{m}} \tau = \omega \tau, \quad x(\tau) = x_0 q(t), \quad \vartheta = \varepsilon x_0^2 \quad (40)$$

ergibt sich

$$\ddot{q} + q + \vartheta q^3 = 0 \quad (41)$$

mit

$$q_0 = 1, \quad v_0 = 0.$$

Mit einer leichten Abwandlung des in⁵ dargestellten Verfahrens findet man die exakte Lösung folgendermaßen:

Die elliptischen Funktionen

$$q = \operatorname{cn}(\nu t + \varphi) \text{ und } q = \operatorname{sn}(\nu t + \varphi) \quad (42)$$

genügen den Differentialgleichungen

$$\ddot{q} = \nu^2 (1 - 2k^2) q + 2\nu^2 k^2 q^3 = 0, \quad (43)$$

bzw.

$$\dot{q} + \nu^2 (1 + k^2) q - 2\nu^2 k^2 q^3 = 0, \quad (44)$$

wo $k^2 < 1$ der Modul der elliptischen Funktionen ist.

Vergleicht man nun (41) mit (43) bzw. (44) so ergibt sich:

$$1. \quad \vartheta > 0 \quad \nu^2 (1 - 2k^2) = 1 \quad 2\nu^2 k^2 = \vartheta, \quad (45)$$

woraus folgt

$$\nu = \sqrt{1 + \vartheta} \quad k^2 = \frac{\vartheta}{2(1 + \vartheta)}, \quad (46)$$

also

$$q = \operatorname{cn}(t\sqrt{1 + \vartheta} + \varphi), \quad (47)$$

oder wegen

$$q_0 = 1, \quad v_0 = 0$$

$$q = \operatorname{cn}(t\sqrt{1 + \vartheta}; k^2) \quad (48)$$

und

$$T = \frac{4K}{\sqrt{1 + \vartheta}},$$

wo $K(k^2)$ das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung⁷ bedeutet.

⁵ A. Weigand: Die Berechnung freier nichtlinearer Schwingungen mit Hilfe der elliptischen Funktionen. Ingenieur-Arch., Bd. XII (1941).

⁶ A. Weigand: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen I. Berlin: Verlag Technik. 1955.

⁷ F. Bowman: Introduction to elliptic functions. London: English Universities Press. 1953.

$$2. \vartheta < 0, \quad \vartheta = -|\vartheta|, \quad \nu^2(1+k^2) = 1, \quad 2\nu^2 k^2 = |\vartheta|, \quad (49)$$

woraus folgt

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{1}{2}|\vartheta|}, \quad k^2 = \frac{|\vartheta|}{2 - |\vartheta|}. \quad (50)$$

Da $k^2 < 1$, so muß, damit Schwingungen überhaupt auftreten können, $|\vartheta| < 1$ sein.

Damit ist dann

$$q = \operatorname{sn}\left(t\sqrt{1 - \frac{1}{2}|\vartheta|} + \varphi\right) \quad (51)$$

oder wegen

$$q_0 = 1, \quad v_0 = 0$$

$$q = \operatorname{sn}\left(K + t\sqrt{1 - \frac{1}{2}|\vartheta|}; k^2\right)$$

oder durch Reduktion des Arguments

$$q = \operatorname{sn}\left(K - t\sqrt{1 - \frac{1}{2}|\vartheta|}; k^2\right) \quad (52)$$

und

$$T = \frac{4K}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}|\vartheta|}}.$$

Die Differentialgleichung (41) läßt sich mit den in III entwickelten Formeln näherungsweise lösen.

Für $\vartheta > 0$ ergibt sich

$$\nu = 1, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$

also A. 1.

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = \frac{3}{8}, \quad \mu_2 = 0,$$

daher

$$q = a_0 \sin\left[\left(1 + \frac{3\vartheta}{8}a_0^2\right)t + \psi_0\right]$$

oder mit

$$q_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad \text{also } a_0 = 1, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$q = \cos\left(1 + \frac{3\vartheta}{8}\right)t \quad (53)$$

und

$$T' = \frac{2\pi}{1 + \frac{3\vartheta}{8}}.$$

Für $\vartheta < 0$, $|\vartheta| < 1$ folgt

$$\nu = 1, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$

also A. 1.

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = -\frac{3}{8}, \quad \mu_2 = 0,$$

daher

$$q = a_0 \sin\left[\left(1 - \frac{3|\vartheta|}{8}a_0^2\right)t + \psi_0\right]$$

oder mit

$$q_0 = 1, \ v_0 = 0, \text{ also } a_0 = 1, \ \psi_0 = \frac{\pi}{2},$$
$$q = \cos \left(1 - \frac{3|\vartheta|}{8} \right) t \tag{54}$$

und

$$T' = \frac{2\pi}{1 - \frac{3|\vartheta|}{8}}.$$

Mittels der exakten Lösungen (48) und (52) läßt sich nun die Leistungsfähigkeit der Näherungen (53) und (54) numerisch überprüfen.

Unter Verwendung der elektronischen Rechananlage des Mathematischen Labors der Technischen Hochschule in Wien wurden die exakten Lösungen (48) und (52) für die acht Parameterwerte $\vartheta = -0.8; -0.6; -0.4; -0.2; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$ mit der Schrittweite $h = 0.05$ für das Zeitintervall $0 \leq \tau \leq 5$, wo τ eine dimensionslose Zeit bedeutet, tabelliert⁸; ebenso wurde verfahren mit den Näherungen (53) und (54). Weiters wurde die Differentialgleichung (41) unter den obigen Voraussetzungen mit dem Runge-Kutta-Verfahren numerisch integriert. Dabei zeigte sich, daß im Rahmen der Zeichengenauigkeit und für das verwendete Zeitintervall die exakte Lösung von der numerischen Lösung nicht zu unterscheiden war, so daß es genügte, die numerische Lösung mit der Näherungslösung zu vergleichen. Bei diesem Vergleich ergab sich, daß die Abweichungen mit wachsendem Absolutbetrag von ϑ sich immer stärker bemerkbar machten, wobei aber die Approximation für positives ϑ wesentlich besser als für negatives ϑ ausfiel. Die stärksten Abweichungen traten bei $\vartheta = -0.8$ auf. Bei $\vartheta = -0.2$ und $\vartheta = +0.2$ fiel im Rahmen der Zeichengenauigkeit und für das betrachtete Intervall die Näherung mit der numerischen Lösung und daher mit der exakten Lösung praktisch zusammen, während bei $\vartheta = +0.4$ eine solche Übereinstimmung nur bis zum ersten Minimum stattfand und dann die Kurven schwach divergierten. Die folgende Tab. 1 gibt den zeitlichen Abstand

$$\Delta T_1 = \frac{T - T'}{4}$$

der ersten Nulldurchgänge wieder. Die Abb. 1 und 2 zeigen die Näherungen für

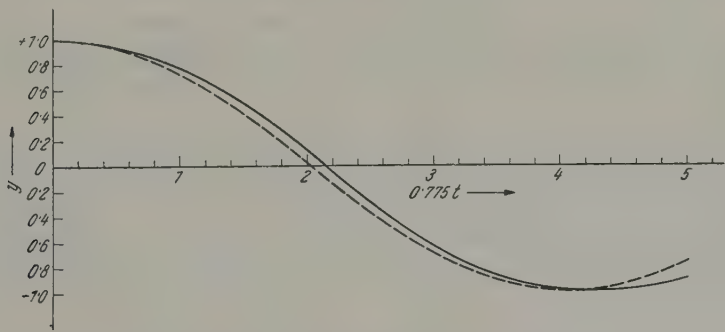


Abb. 1. — Numerische Lösung von
 $y'' + y + \vartheta y^3 = 0$ für $\vartheta = -0,6$
----- $y = \cos (0,775 t)$, $T' = 8,107$,
 $T = 8,597$

⁸ L. M. Milne-Thomson: Jacobian elliptic function tables. New York: Dover Publications. 1950.

$\vartheta = -0.6$ und $\vartheta = +0.6$. Weiters ergab sich, daß die Rechenarbeit bei der Tabellierung der Näherungslösungen wesentlich geringer war als jene bei der Tabellierung der elliptischen Funktionen.

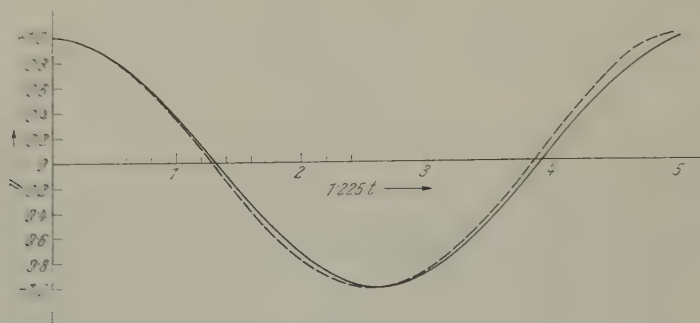


Abb. 2. — Numerische Lösung von
 $y'' + y + \vartheta y^3 = 0$ für $\vartheta = 0.6$
 - - - $y = \cos(1.225 t)$, $T' = 5.129$,
 $T = 5.233$

Tabelle 1

ϑ	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	+0.2	+0.4	+0.6	+0.8
ΔT_1	0.379	0.123	0.038	0.006	0.002	0.013	0.026	0.036

VI. Schlußbemerkungen

Wie der numerische Vergleich erkennen läßt, liefern die entwickelten Näherungen für gewisse Parameterintervalle befriedigende Approximationen, sofern bei dem betrachteten nichtlinearen Problem tatsächlich eine periodische Bewegung möglich ist. Viele wesentlich nichtlineare Erscheinungen, wie etwa Selbststeuerung, Instabilwerden, Auswanderungserscheinungen u. a. — man vergleiche etwa⁹ — werden mit diesen Näherungen naturgemäß nicht erfaßt werden können. Trotzdem scheinen aber die entwickelten Näherungsformeln von Wert zu sein, weil in der geschlossenen, analytischen Näherung die Anfangswerte und etwa vorkommende Parameter explizit in Erscheinung treten, so daß die Auswirkung etwaiger Änderungen leicht zu überblicken ist, was ja bei numerischer Lösung nicht so rasch möglich ist, weil jede Variation der Anfangswerte und Parameter eine Wiederholung des ganzen Rechenganges bedingt und die nunmehr vorliegenden numerischen Ergebnisse hinterher graphisch festgehalten werden müssen.

Der Verfasser hofft, daß durch die Bekanntgabe der entwickelten Formeln, die in gewisser Hinsicht eine Erweiterung der in¹⁰ angegebenen Tabelle der K-Transformierten darstellen, die Anwendung des bekannten Krylow-Bogoljubowschen Verfahrens wesentlich erleichtert wird. Die angeführten Vergleiche sollen nur die Grundlage für weitere praktische Erprobungen, die in nächster Zeit im Mathematischen Labor durchgeführt werden, bilden.¹¹

⁹ H. Scholz: Kolloquium über Probleme der nichtlinearen Mechanik (Tagungsbericht). MTW-Mitteilungen, Jg. V, Nr. 3, 1958.

¹⁰ K. Magnus: Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungssysteme. Düsseldorf: VDI-Forschungsheft 451, 1955.

¹¹ Inzwischen erschien von H. Kauderer das Werk „Nichtlineare Mechanik“ (Berlin: Springer, 1958), in dem eine Verbesserung des Krylow-Bogoljubowschen Verfahrens behandelt wird.

Literaturverzeichnis

- A. A. Andronow-C. E. Chaikin: Theory of oscillations. Princeton University Press, 1949.
 E. Bukovics: Nichtlineare Regelvorgänge (Tagungsbericht), MTW-Mitteilungen, Jg. II, Nr. 5 (1955).
 C. Duffing: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz. Braunschweig: Vieweg, 1918.
 W. Hahn: Nichtlineare Regelvorgänge, insbes. E. Pestel, S. 67. München: Oldenbourg, 1956.
 E. Kamke: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1956.
 K. Klotter: Neuere Methoden und Ergebnisse auf dem Gebiet nichtlinearer Schwingungen. VDI-Berichte, Bd. IV, 1955.
 K. Klotter: Technische Schwingungslehre I. Berlin: Springer, 1951.
 D. F. Lawden: Mathematics of engineering systems. London: Methuen, 1954.
 K. Magnus: Über den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen, ZAMM, Bd. XXXVII, Heft 11/12, 1957.
 N. Minorsky: Introduction to nonlinear mechanics. Ann Arbor: Edwards, 1947.
 R. Reissig: Neue Methoden der nichtlinearen Mechanik von Krylow und Bogoljubow. Wissensch. Zeitschr. der Humboldt-Universität, Berlin, Jg. V, Nr. 2, 1956.
 J. J. Stoker: Nonlinear vibrations. New York: Interscience Publishers, 1950.

(Eingegangen am 7. Mai 1958)

Zur Ableitung der elastostatischen Gleichungen für die Rotationsschalen aus dem Minimalprinzip der Variationsrechnung

Von W. Müller, München

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit werden die bekannten elastostatischen Gleichgewichtsbedingungen einer Rotationsschale unter Benutzung der Ausdrücke für die Verzerrungskomponenten aus den Bedingungen für das Minimum der sogenannten Ergänzungsarbeit, der Differenz der Formänderungsenergie und der Arbeit der äußeren Kräfte abgeleitet. Im Anschluß daran werden einige bemerkenswerte Sonderfälle kurz betrachtet, die sich ohne weiteres aus den Grundgleichungen ergeben.

I. Einleitung

Wenn man die vielfach übliche, aber nicht recht befriedigende Methode vermeiden will, die davon ausgeht, das Gleichgewicht der Kräfte an einem aus dem Verbande herausgetrennten und den Hauptrichtungen angepaßten Körperelement zu betrachten, so bleiben im wesentlichen zwei weitere Möglichkeiten übrig. Entweder man transformiert die einschlägigen vektoriellen bzw. dyadischen Operationen auf allgemeine krummlinige orthogonale Koordinaten, um dann leicht zu den gewünschten Grundgleichungen in unserem besonderen Fall zu gelangen. Oder man beschränkt sich auf die Aufstellung der Verzerrungs- und Spannungskomponenten in ihrer Abhängigkeit von den Verschiebungsgrößen und benutzt dann den allgemeinen Ausdruck für die Formänderungsenergie bzw. die sogenannte Ergänzungsarbeit, die Differenz der Formänderungsenergie und der Arbeit der äußeren Kräfte. Im folgenden soll insbesondere gezeigt werden, daß die bekannten Eulerschen Gleichungen als Bedingungen für das Minimum dieser Ergänzungsarbeit mit den Gleichgewichtsbedingungen für die Punkte einer Rotationsschale identisch sind.

II. Koordinaten eines Schalenpunktes

Bezeichnet man die Hauptlinienelemente auf der Schalenmittelfläche in Richtung der Meridiantangente und der Breitenkreistangente mit ds_1 und ds_2 , die zugehörigen Hauptkrümmungsradien mit R_1 und R_2 , den Winkel zwischen der Normalen und der

Rotationsachse mit α , ferner die Polarkoordinaten eines Punktes des Parallelkreises mit r, φ , so ist

$$ds_1 = R_1 d\alpha = g_1 d\alpha; \quad ds_2 = R_2 \sin \alpha d\varphi = r d\varphi = g_2 d\varphi \quad (1a)$$

Als dritte Hauptrichtung soll die Richtung der inneren Normalen gelten, entsprechend der Beziehung

$$ds_3 = g_3 dz \quad (g_3 = 1) \quad (1b)$$

Bei der Ableitung in Richtung dieser Normalen hat man R_1 bzw. R_2 durch $R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right)$ bzw. $R_2 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right)$ zu ersetzen, wo $|z| \leq h/2$ ist, wenn h die Schalendicke bezeichnet.

Dann ergibt sich z. B.

$$\frac{\partial R_1}{\partial z} = \frac{\partial R_2}{\partial z} = -1 \quad (2)$$

III. Die Komponenten der Verzerrungen und der Spannungen

Wenn man die Verschiebungen in den Hauptrichtungen 1, 2, 3 mit u, v, w , die Ableitungen nach α mit Strichen bezeichnet und die Beziehung zwischen R_1 und R_2

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = R_1 \cos \alpha \quad (3)$$

benutzt, so ergeben sich nach den allgemeinen Transformationsformeln folgende Werte für die Dilatationsgrößen ε_i und den Winkelverzerrungen γ_{ik}

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_1 g_2} v \frac{\partial R_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{g_1 g_3} w \frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{u' - w}{R_1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{u}{g_2 g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{g_2 g_3} w \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{u \cot \alpha - w}{R_2} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{2} \left[\frac{g_2}{g_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{g_2} \right) + \frac{g_3}{g_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{v \sin \alpha}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right] \\ \gamma_{31} &= \frac{1}{2} \left[\frac{g_1}{g_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{g_1} \right) + \frac{g_3}{g_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{u + w'}{R_1} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{g_1} \right) + \frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{g_2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \alpha} - \frac{v \cot \alpha}{R_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Zwischen diesen Verzerrungsgrößen und den Spannungen σ_i und τ_{iR} bestehen dann folgende Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2); & \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \\ \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); & \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); & \tau_{ik} &= 2G \gamma_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wobei E und $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ die Elastizitätsmoduln und $\nu = \frac{1}{m}$ die Poissonsche Konstante bedeuten.

IV. Formänderungsenergie und Ergänzungsarbeit

Bei der weiteren Behandlung kommt es vor allem darauf an, den Divergenzvektor der Spannungsdyaide darzustellen, der unmittelbar bei gegebenen äußeren Kräften die gesuchten Gleichungen liefert. Die entsprechenden etwas umständlichen Rechnungen sollen an anderer Stelle gegeben werden. Das Ergebnis stimmt im wesentlichen

überein mit den von J. Fadle¹ und J. Krettner² aufgestellten Gleichungen. Der andere, in der vorliegenden Arbeit einzuschlagende Weg besteht darin, die von der Variationsrechnung gelieferten Bedingungen für das Minimum der Ergänzungsarbeit zu entwickeln. Wenn man die als konstant und klein vorausgesetzte Wandstärke der Schale mit h , die auf die Flächeneinheit bezogene Formänderungsenergie mit U , ferner die auf die Hauptrichtungen bezogenen Flächenkräfte mit p_1, p_2, p_3 bezeichnet, so ist die Differenz der Formänderungsenergie und der Arbeit der äußeren Kräfte durch das Integral

$$\int \left[\bar{U} - \frac{1}{h} (p_1 u + p_2 v + p_3 w) \right] h df \quad (6)$$

dargestellt, wo $df = R_1 r d\alpha d\varphi$ zu setzen ist. Wir führen nun die unter dem Integralzeichen stehende Funktion

$$F = \left[\bar{U} - \frac{1}{h} (p_1 u + p_2 v + p_3 w) \right] R_1 r \quad (7)$$

ein und berücksichtigen folgenden allgemeinen Ausdruck für die Formänderungsenergie

$$\bar{U} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 + 2(1+\nu)(\tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 + \tau_{12}^2)] \quad (8)$$

Für das Folgende kann man sich auf die Koordinaten α und φ beschränken und $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ setzen. Dann erkennt man, daß F eine Funktion der Größen

$$u, v, w; \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \text{ usw.}$$

ist. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = u_\alpha; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = u_\varphi; \quad \text{usw.}$$

so ergeben sich aus den Eulerschen Gleichungen³ für das Minimum der Ergänzungsarbeit folgende Relationen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial u_\varphi} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial v_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial v_\varphi} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial w_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial w_\varphi} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

die nun näher ausgewertet werden müssen. Bei der Ausrechnung sind die bekannten Beziehungen zu beachten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \sigma_1} &= \varepsilon_1; \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \sigma_2} = \varepsilon_2; \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau_{ik}} = \gamma_{ik} \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial u} &= \sigma_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u} + \sigma_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u} + 2 \sum \tau_{ik} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial u} \quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹ J. Fadle: Ingen.-Archiv 17, 62–70 (1949).

² J. Krettner: Österr. Ingen.-Archiv 7, 12–21 (1953); 7, 251 (1953).

³ R. Courant-D. Hilbert: Methoden der mathem. Physik. S. 157f. Berlin. 1931.

³ Ph. Frank-R. v. Mises: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I. Teil, Braunschweig 1930. S. 249f.

Man gewinnt damit die folgenden Werte für die in (6) auftretenden Differentialquotienten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \sigma_2 R_1 \cos \alpha + \tau_{13} r - \frac{p_1}{h} R_1 r; & \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} &= \sigma_1 r; & \frac{\partial F}{\partial u_\varphi} &= \tau_{12} r; \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= -\tau_{12} R_1 \cos \alpha + \tau_{13} R_1 \sin \alpha - \frac{p_2}{h} R_1 r; & \frac{\partial F}{\partial v_\alpha} &= \tau_{12} r; & \frac{\partial F}{\partial v_\varphi} &= \sigma_2 R_1; \\ \frac{\partial F}{\partial w} &= -\sigma_1 r - \sigma_2 R_1 \sin \alpha - \frac{p_3}{h} R_1 r; & \frac{\partial F}{\partial w_\alpha} &= \tau_{13} r; & \frac{\partial F}{\partial w_\varphi} &= \tau_{23} R_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wenn man jetzt noch die mit h multiplizierten Spannungen einführt, also

$$h \sigma_1 = S_1; \quad h \sigma_2 = S_2; \quad h \tau_{ik} = T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

setzt, so ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen der Rotationsschale in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r S_1)}{\partial \alpha} - S_2 R_1 \cos \alpha - T_{13} r + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_1 T_{12}) + p_1 r R_1 &= 0 & (a) \\ \frac{\partial (r T_{12})}{\partial \alpha} + T_{12} R_1 \cos \alpha + R_1 \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} - T_{23} R_1 \sin \alpha + p_2 r R_1 &= 0 & (b) \\ S_1 r + S_2 R_1 \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r T_{13}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_1 T_{23}) + p_3 r R_1 &= 0 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

V. Die Formänderungsenergie der Biegung im drehsymmetrischen Fall

Es ist bekannt, daß die Biegemomente M_1 und M_2 lineare Funktionen der Krümmungsänderungen κ_1 und κ_2 sind. Man hat

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= d \left(\frac{1}{R_1} \right) = d \left(\frac{da}{ds_1} \right) = \frac{d\vartheta}{da} \cdot \frac{da}{ds_1} = \frac{\vartheta^1}{R_1} \\ \kappa_2 &= d \left(\frac{1}{R_2} \right) = d \left(\frac{\sin \alpha}{r} \right) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\vartheta}{R_2} = \frac{\vartheta \cot \alpha}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wo ϑ durch die Größe

$$\vartheta = \frac{u + w'}{R_1} \quad (14)$$

dargestellt ist, die auch in dem Ausdruck für γ_{31} vorkommt. Dann bestehen die linearen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -N (\kappa_1 + \nu \kappa_2) \\ M_2 &= -N (\kappa_2 + \nu \kappa_1) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wo $N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ die Biegekonstante bedeutet.

Die Formänderungsenergie der Biegung kann zunächst in der Form

$$\bar{U} = - \left(\frac{1}{2} M_1 \kappa_1 + \frac{1}{2} M_2 \kappa_2 \right) \quad (16)$$

dargestellt werden. Drückt man die Größen κ_1 und κ_2 durch die Momente aus, so kommt

$$\kappa_1 = - \frac{M_1 - \nu M_2}{N(1-\nu^2)}; \quad \kappa_2 = - \frac{M_2 - \nu M_1}{N(1-\nu^2)} \quad (17)$$

und man gewinnt für die Formänderungsarbeit pro Flächeneinheit den Wert

$$\bar{U} = \frac{1}{2N(1-\nu^2)} [M_1^2 + M_2^2 - 2\nu M_1 M_2] \quad (18)$$

Diesen Ausdruck betrachten wir als Funktion von ϑ und ϑ' . Zu dieser Formänderungsarbeit tritt nun noch der von τ_{13} herrührende Teil, der auch von ϑ abhängt. Setzt man

$$H_1 = \bar{U} R_1 r$$

ferner

$$H_2 = \frac{h(1+\nu)}{E} \tau_{13}^2 R_1 r = \frac{h}{2G} \tau_{31}^2 R_1 r$$

wo $\tau_{31} = G \vartheta = G \frac{u+w'}{R_1}$ zu setzen ist, so erhält man die Eulersche Bedingungsgleichung für das Minimum der Formänderungsenergie in der Form

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial H_2}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta'} \right) = 0 \quad (19)$$

Nun wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial M_1^2}{\partial \vartheta} &= -N M_1 \frac{\nu \cot \alpha}{R_2}; & \frac{1}{2} \frac{\partial M_2^2}{\partial \vartheta} &= -N M_2 \frac{\cot \alpha}{R_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial M_1^2}{\partial \vartheta'} &= -N M_1 \frac{1}{R_1}; & \frac{1}{2} \frac{\partial M_2^2}{\partial \vartheta'} &= -N M_2 \frac{\nu}{R_1} \end{aligned} \quad (20)$$

Daher ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \left[M_1 \frac{\nu \cot \alpha}{R_2} + M_2 \frac{\cot \alpha}{R_2} - \nu \left(M_1 \frac{\cot \alpha}{R_2} + \nu M_2 \frac{\cot \alpha}{R_2} \right) \right] R_1 r \\ &= -M_2 R_1 \cos \alpha \\ \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta'} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{M_1}{R_1} + M_2 \frac{\nu}{R_2} + \nu \left(M_1 \frac{\nu}{R_1} + M_2 \frac{1}{R_1} \right) \right] R_1 r = -M_2 r \\ \frac{\partial H_2}{\partial \vartheta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} h \tau_{31} G R_1 r = T_{13} R_1 r \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Mit diesen Werten erhalten wir aus (19) und (21) die folgende Beziehung zwischen den Momenten M_1 und M_2

$$\frac{\partial (r M_1)}{\partial \alpha} - M_2 R_1 \cos \alpha - T_{31} R_1 r = 0 \quad (22a)$$

oder

$$(M_1 - M_2) \frac{\cot \alpha}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - T_{31} = 0 \quad (22b)$$

Wenn wir z. B. vollständige Symmetrie, auch in der Belastung voraussetzen und alle Ableitungen nach φ gleich Null, ferner $T_{13} = T$ setzen, so bleiben die drei Gleichungen¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(S_1 r)}{d\alpha} - S_2 R_1 \cos \alpha T r + p_3 r R_1 &= 0 \\ \frac{d(T r)}{d\alpha} + S_1 r + S_2 R_1 \sin \alpha + p_3 r R_1 &= 0 \\ \frac{d(M_1 r)}{d\alpha} - M_2 R_1 \cos \alpha - T r R_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

¹ Vgl. R. Meissner: Physik. Zeitschr. Bd. 14 S. 343f. (1916).

VI. Überblick über einige Sonderfälle

a) Der Fall der Kugelschale ergibt sich aus $R_1 = R_2 = a$. Im symmetrischen Fall haben wir z. B. die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (S_1 - S_2) \cot \alpha + \frac{dS_1}{da} - T + p_1 a &= 0 \\ S_1 + S_2 + T \cot \alpha + \frac{dT}{da} + p_3 a &= 0 \\ (M_1 - M_2) \cot \alpha + \frac{dM_1}{da} - a T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Im unsymmetrischen Fall der Kugelschale ohne Biegungswiderstand ist $M_1 = M_2 = 0$, $T_{13} = T_{23} = 0$ zu setzen. Dann ergeben sich für die drei Größen S_1 , S_2 und T_{12} die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial a} + (S_1 - S_2) \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} + p_1 a &= 0 \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial a} + 2 T_{12} \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + p_2 a &= 0 \\ S_1 + S_2 + p_3 a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

b) Kegelschale. Hier wird $R_1 = \infty$, $R_1 d\alpha = dx$; $\alpha = \text{konst.} = \alpha_0$.

Die Koordinate x kann als Entfernung eines Punktes der Mittelfläche von der Spitze des Kegels betrachtet werden. Dann gehen unsere Gleichungen über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(xS_1)}{dx} &= S_2 \\ S_2 \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{d}{dx}(xT) &= px \\ \frac{d(xM_1)}{dx} - M_2 - Tx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus ihnen kann man, wie nicht näher ausgeführt werden kann, die Größen S und M , und schließlich, wenn man die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dx} + \nu \frac{u - w \operatorname{tg} w_0}{x} \right]; S_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{u - w \operatorname{tg} w_0}{x} + \nu \frac{du}{dx} \right] \\ M_1 &= -N \left[\frac{d^2 w}{dx^2} + \nu \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \right]; M_2 = -N \left[\frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + \nu \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

benutzt, auch die Verschiebungen, z. B. w in Abhängigkeit von x ermitteln. Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung im Membranfall ($T = M = 0$), bei dem sich die Spannungen ohne weiteres berechnen lassen, wenn p gegeben ist.

c) Kreiszyylinder unter Innendruck. Im Falle des Zylinders ist $R_1 = \infty$, $R_1 d\alpha = dx$, $R_2 = a$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Dann ergibt sich aus (19a)

$$\frac{dS_1}{dx} = 0 \quad (28)$$

Wir können daher $S_1 = \text{konst.} = 0$ setzen. Bei dem Innendruck p gehen die Gleichungen (12c) und (23) mit $T_{13} = T$ über in

$$\frac{S_2}{a} + \frac{dT}{dx} = p; \quad \frac{dM_1}{dx} = T \quad (29)$$

Daraus folgt dann

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = p - \frac{S_2}{a} \quad (30)$$

Wegen

$$S_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{a} \right) \quad (31)$$

ergibt sich aus $S_1 = 0$

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{a} \quad (32)$$

und daher

$$S_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{w}{a} (1-\nu^2) = -\frac{Eh w}{a} \quad (33)$$

Ferner ist

$$M_1 = -N \frac{\partial'}{R_1} = -N \frac{1}{R_1} \left[\frac{du}{dx} + R_1 \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = -N \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (34)$$

Man erhält daher aus (31), wenn w nach außen positiv gerechnet wird, die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(N \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{a^2} w = p \quad (35)$$

oder bei konstantem N

$$N \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = p$$

d) **Gedrückte kreiszylindrische Hohl säule.** Wenn man die Spannungswerte

$$S_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} + \nu \frac{w}{a} \right); \quad S_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{a} + \nu \frac{du}{dx} \right] \quad (36)$$

berücksichtigt und $S_1 = -ph = -P$ setzt, so folgt

$$\frac{du}{dx} = -p \frac{(1-\nu^2)}{E} - \nu \frac{w}{a} \quad (37)$$

Einsetzung in den Ausdruck für S_2 liefert dann

$$S_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{a} (1-\nu^2) - \frac{\nu p (1-\nu^2)}{E} \right] = \frac{Eh}{a} \left(w - \frac{P \nu a}{E} \right) = \frac{Eh}{a} (w - w_0) \quad (38)$$

Wenn man weiter für die Krümmung $\frac{1}{R_1} = -\frac{d^2 w}{dx^2}$ einführt, so erhält man aus (12c)

$$P \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{a} (w - w_0) + \frac{dT}{dx} = 0$$

und wegen

$$M_1 = N \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad \frac{dM_1}{dx} = T \quad (39)$$

die endgültige Differentialgleichung für w

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{N} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{aN} (w - w_0) = 0 \quad (40)$$

Mit diesen Beispielen soll nur auf die Mannigfaltigkeit der aus den Grundgleichungen ableitbaren Sonderfälle anschaulich gemacht werden. Weitere Verallgemeinerungen sollen an anderer Stelle entwickelt werden.

(Eingegangen am 14. Mai 1958)

Prinzipien bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Methoden zur Abschätzung des Fehlers*

Von E. Bukovics, Wien

Zusammenfassung. Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen ist eine sehr große Zahl von speziellen Formeln entwickelt worden. Die Darstellung gibt einen Überblick über die Prinzipien, die zur Aufstellung der wichtigsten Formeln geführt haben und zeigt, wie daraus spezielle, verschiedenen Anwendungszwecken dienende Formeln abgeleitet werden können. Es wird dabei besonders auf die — in den meisten Fällen erst in den letzten Jahrzehnten in Angriff genommene — Behandlung des Fehlerproblems eingegangen und die dabei verwendeten Methoden herausgearbeitet. Dabei wird auch die jüngste Entwicklung, die sich insbesondere mit der Stabilitätsfrage und mit der Anwendung statistischer Verfahren beschäftigt, berücksichtigt. Ziel der Darstellung ist es, durch Herausarbeiten der Grundgedanken einen Zugang zu den zahlreichen modernen Veröffentlichungen auf diesem Gebiet zu geben.

I. Einleitung

Die mathematische Formulierung zahlreicher Probleme der Technik und der Naturwissenschaften führt auf Differentialgleichungen oder auf Systeme von solchen. Die exakte Lösung in geschlossener Form ist bekanntlich nur in den seltensten Fällen möglich. Es ist nun naheliegend, durch Vernachlässigung von Gliedern die Differentialgleichung des Problems so zu vereinfachen, daß man geschlossen lösbare Typen erhält. Die damit erzielten Ergebnisse sind jedoch in den meisten Fällen nicht hinreichend genau. Aus diesem Grunde gewinnen Näherungsmethoden, die wenigstens eine genügend genaue Lösung des Problems gestatten, immer mehr an Bedeutung, besonders in der Gegenwart, wo der oft beträchtliche, mit der Anwendung solcher Methoden verbundene Rechenaufwand durch programmgesteuerte Rechenmaschinen zuverlässig und mit vertretbarem Zeitaufwand geleistet werden kann.

Die Anzahl der zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen entwickelten Methoden und Formeln ist so groß, daß es immer schwieriger wird, den Überblick zu behalten und die für die jeweils vorliegende Aufgabe zweckmäßigste Methode auszuwählen. Die vorliegende Darstellung soll unter Beschränkung auf den Fall der Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen die wichtigsten Grundprinzipien aufzeigen, nach denen ein Großteil der gebräuchlichen Formeln sich entwickeln läßt. Es soll dabei auch auf die besonders wichtige Aufgabe der Abschätzung des durch die Anwendung des Näherungsverfahrens entstehenden Fehlers eingegangen werden, wobei allerdings gesagt werden muß, daß diese besonders schwierige Frage in den meisten Fällen insofern noch nicht als befriedigend gelöst bezeichnet werden kann, als es noch nicht gelungen ist, Formeln anzugeben, die es gestatten, mit vertretbarem Rechenaufwand eine Abschätzung zu geben, die die Größenordnung des Fehlers richtig wiedergibt.

Es soll in keiner Weise Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden, sondern diesbezüglich auf die zusammenfassenden Darstellungen, insbesondere von L. Collatz¹ und W. E. Milne² verwiesen werden. Die vorliegende Darstellung soll lediglich die Orientierung und das Verständnis auf diesem so ausgedehnten Gebiet erleichtern.

* Überarbeitete Fassung eines am 30. April 1957 auf Einladung der Justus-Liebig-Hochschule in Gießen gehaltenen Vortrages. Der leider am 30. Mai 1957 verstorbene Vorstand des Mathematischen Institutes der Hochschule, Prof. Dr. E. Ullrich, gab die Anregung zur Veröffentlichung des Vortrages. Deshalb sei diese Veröffentlichung dem Andenken dieses hervorragenden Forschers und liebenswerten Lehrers gewidmet.

¹ L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955.

² W. E. Milne: Numerical Solution of Differential Equations. New York: Wiley. 1953.

II. Anfangswertprobleme und numerische Näherungsmethoden

Es sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

gegeben. Die gesuchte Lösung soll die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

erfüllen, d. h. durch den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ hindurchgehen. Die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Lösung ist gesichert, wenn die Funktion $f(x, y)$ in einem — diesen Punkt enthaltenden — Bereich stetig und beschränkt ist und einer Lipschitz-Bedingung der Form

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < L \cdot |y_2 - y_1| \quad (3)$$

genügt, worin L die Lipschitz-Konstante darstellt.

Bei numerischen Näherungsverfahren berechnet man nun, von x_0 ausgehend, für äquidistante Argumente

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

mit der Schrittweite h Näherungswerte für die Lösungsfunktion. Eine Reihe von Näherungsverfahren geht von der durch Integration von (1) entstehenden Integralgleichung

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \cdot dx \quad (4)$$

aus. Unter dem Integralzeichen steht die noch unbekannte Funktion $y(x)$. Nun kann man aber das Integral durch irgendeine Quadraturformel approximieren, etwa indem man die Funktion $f(x, y)$ durch ein Interpolationspolynom ersetzt, das an einer gewissen Anzahl von Stellen mit der Funktion übereinstimmt, und dieses Interpolationspolynom integriert. Die auf diesem Prinzip beruhenden Verfahren bezeichnet man als Differenzenschemaverfahren.

Das Runge-Kutta-Verfahren und eine Reihe anderer Verfahren beruhen darauf, daß — wieder schrittweise — Näherungswerte unter Benützung der Taylor-Entwicklung der Lösungsfunktion

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + y'(x_m) \frac{h}{1!} + y''(x_m) \frac{h^2}{2!} + \dots \quad (5)$$

berechnet werden. Dabei wird die oft mühevolle Berechnung der höheren Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ dadurch umgangen, daß man zunächst an Zwischenstellen sogenannte Grobwerte berechnet, die dann dazu herangezogen werden, durch ihre Verwendung als Korrekturglieder die gleiche Wirkung zu erzielen, als ob man Taylor-Glieder höherer Ordnung berücksichtigt hätte.

Auf die Differenzenschemaverfahren und auf die Verfahren vom Typ des Runge-Kutta-Verfahrens, die die am häufigsten verwendeten Verfahren sind, wird in den späteren Abschnitten ausführlicher eingegangen werden. Es möge aber noch kurz hier auf einige andere Verfahren hingewiesen werden, die auf anderen Prinzipien beruhen. Einige Verfahren knüpfen z. B. ebenfalls an Formel (4) an, nur wird zur Quadratur des Integrals nicht ein Interpolationspolynom verwendet, sondern ein anderer Näherungsausdruck für den Integranden. So verwendet das Duffingsche Verfahren^{3, 4} die nach Hermite verallgemeinerte Taylorsche Formel, ein von W. Quade

³ G. Duffing: Forsch. Arb. Ing. Wes. **224**, 25—50 (1920).

⁴ E. Pflanz: Z. angew. Math. u. Mech. **28**, 167—172 (1948).

angegebenes Verfahren⁵ trigonometrische Interpolationspolynome und ein von P. Brock und F. J. Murray⁶ angegebenes Verfahren Exponentialausdrücke. Vor einiger Zeit hat W. Quade^{7,8} folgendes Prinzip zur Gewinnung von Formeln zur numerischen Integration von Differentialgleichungen angegeben: Es werden unter Benützung der Interpolationsformeln von Hermite Polynome konstruiert, die an bestimmten vorgegebenen Stellen dem Richtungsfeld der Differentialgleichung angepaßt sind. Durch Zusatzforderungen, die diesen Polynomen auferlegt werden, erhält man dann Beziehungen, die zur Konstruktion von Näherungsformeln ausgenützt werden können. Eine solche Zusatzforderung, die an Gedankengänge der Approximationstheorie anknüpft, besteht z. B. darin, daß das durch Anwendung der Substitution $x = \cos t$ entstehende trigonometrische Polynom in $\cos \nu t$ mit einer seiner Teilsummen übereinstimmen soll. Dieser Gedanke wird in⁹ weiterverfolgt und zur Gewinnung solcher Formeln ausgenützt.

Zur Vereinfachung der Darstellung werden die folgenden Betrachtungen im allgemeinen zunächst an Hand der Differentialgleichung erster Ordnung (1) mit den Anfangsbedingungen (2) durchgeführt werden. Es wird erst nachher an verschiedenen Stellen auf den Fall eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_i}{dx} = y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_i(x_0) = y_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

bzw. auf den Fall einer Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (8)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)} \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

eingegangen werden. Erinnert sei an die Tatsache, daß vom theoretischen Standpunkt aus kein wesentlicher Unterschied zwischen dem Fall (6) und dem Fall (8) besteht, da ja eine Differentialgleichung n -ter Ordnung immer auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Auch die Umkehrung ist möglich. Im Hinblick auf die Anwendung numerischer Verfahren besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied, da im allgemeinen die direkte numerische Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung dem indirekten Weg der Rückführung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung vorzuziehen ist, dies in erster Linie aus dem Grund, weil dann die Genauigkeitsverhältnisse — zumindest bei Durchführung einer kleinen Anzahl von Schritten — günstigere sind.

Die Lipschitz-Bedingung für das System (6) lautet

$$\begin{aligned} |f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)| &< \sum_{j=1}^n L_{ij} |y_j - \bar{y}_j| \\ &\leq L_i \sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j| \end{aligned} \quad (10)$$

⁵ W. Quade: Z. angew. Math. u. Mech. **31**, 237–238 (1951).

⁶ P. Brock-F. J. Murray: MTAC **6**, 63–78 (1952).

⁷ W. Quade: Proc. Int. Congr. Amsterdam. II, 472 (1954).

⁸ W. Quade: Z. angew. Math. u. Mech. **37**, 161–169 (1957).

⁹ S. Fußnote 8.

und für die Differentialgleichung n -ter Ordnung (8)

$$\begin{aligned} & |f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) - f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})| \\ & < \sum_{v=0}^{n-1} L_v |y_2^{(v)} - y_1^{(v)}| \leq L \sum_{v=0}^{n-1} |y_2^{(v)} - y_1^{(v)}|, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei in (10)

$$L_i = \max_j L_{ij}, \quad L = \max_i L_i$$

und in (11)

$$L = \max_v L_v$$

zu nehmen ist.

Im folgenden wird die exakte Lösungsfunktion durchgehend mit $y(x)$ bezeichnet, während für die Näherungsfunktion die Bezeichnung $\eta(x)$ angewendet werden soll. Zur Abkürzung werden noch die Bezeichnungen

$$y(x_i) = y_i, \quad \eta(x_i) = \eta_i$$

verwendet. Als Fehler eines Näherungsverfahrens bezeichnet man die Abweichungen

$$\varepsilon(x) = y(x) - \eta(x) \quad (12)$$

bzw.

$$\varepsilon_j = y_j - \eta_j. \quad (13)$$

Für das System (6) gilt analog

$$\varepsilon_i(x) = y_i(x) - \eta_i(x) \quad (14)$$

$$\varepsilon_{i,j} = y_{i,j} - \eta_{i,j}$$

mit

$$y_{i,j} = y_i(x_j)$$

$$\eta_{i,j} = \eta_i(x_j)$$

und für die Differentialgleichung n -ter Ordnung (8)

$$\varepsilon^{(v)}(x) = y^{(v)}(x) - \eta^{(v)}(x) \quad (15)$$

$$\varepsilon_j^{(v)} = y_j^{(v)} - \eta_j^{(v)}$$

mit

$$y_j^{(v)} = y^{(v)}(x_j)$$

$$\eta_j^{(v)} = \eta^{(v)}(x_j).$$

Aufgabe einer Fehlerabschätzung ist es, Schranken für den durch ein Näherungsverfahren verursachten Fehler zu finden. Die meisten der bisher aufgestellten Fehlerabschätzungen beschränken sich auf die Abschätzung des sogenannten Verfahrensfehlers, der durch die Anwendung des numerischen Näherungsverfahrens verursacht wird. Auf die anderen Fehlerquellen, die noch zu berücksichtigen wären, wird später eingegangen werden.

Setzt man in die Differentialgleichung (1) eine Näherungslösung ein, so ergibt sich im allgemeinen eine Abweichung

$$d(x) = \eta'(x) - f(x, \eta(x)), \quad (16)$$

die man als Richtungsfehler oder Defekt der Differentialgleichung bezeichnet. Für manche Fälle der Praxis genügt die Bestimmung des Richtungsfehlers vollständig. Beim System (6) sind die Defekte oder Richtungsfehler durch

$$d_i(x) = \eta_i' - f_i(x, \eta_1(x), \dots, \eta_n(x)) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

gegeben. Bei der Differentialgleichung n -ter Ordnung bezeichnet man den Defekt

$$d(x) = \eta^{(n)} - f(x, \eta(x), \eta'(x), \dots, \eta^{(n-1)}(x)) \quad (18)$$

auch als Lokalen Fehler.

III. Die Differenzenschemaverfahren

Die Differenzenschemaverfahren setzen voraus, daß für eine gewisse Anzahl von Stellen, z. B. $x_{r-p}, x_{r-p+1}, \dots, x_{r-1}, x_r$ bereits Werte für die Lösung von (1) bekannt sind. Sodann wird das Interpolationspolynom der Ordnung p gebildet, das an den bezeichneten Stellen die Werte $f(x_v, y(x_v))$ annimmt. Bezeichnet man dieses Interpolationspolynom mit $y_p(x)$, so gilt

$$f(x, y(x)) = y_p(x) + R_{p+1}, \quad (19)$$

mit

$$y_p(x) = \sum_{q=0}^p \gamma_q(x) \nabla^q f(x_r, y_r), \quad (20)$$

wobei R_{p+1} das Restglied der Interpolationsformel ist. Die Funktionen $\gamma_q(x)$ sind für die verwendete Interpolationsformel charakteristisch. Die Ausdrücke $\nabla^q f(x_r, y_r)$ sind die durch

$$\nabla^q f(x_r, y_r) = \nabla^{q-1} f(x_r, y_r) - \nabla^{q-1} f(x_{r-1}, y_{r-1}) \quad (21)$$

definierten aufsteigenden Differenzen.

Durch Einsetzen von (19) in (4) erhält man die exakte Formel

$$y_{r+1} = y_r + h \sum_{q=0}^p \beta_q \nabla^q f(x_r, y_r) + S_{p+1}, \quad (22)$$

wobei die Konstanten β_q durch

$$\beta_q = \frac{1}{h} \int_{x_r}^{x_{r+1}} \gamma_q(x) dx \quad (23)$$

gegeben sind und ein für allemal berechnet werden können. S_{p+1} ist das Restglied, das durch Integration von R_{p+1} entsteht. Aus (22) erhält man nun eine zur numerischen Integration geeignete Näherungsformel, wenn man das Restglied wegläßt und in den Differenzen auf der rechten Seite die exakten Lösungswerte durch die Näherungswerte ersetzt

$$\eta_{r+1} = \eta_r + h \sum_{q=0}^p \beta_q \nabla^q f(x_r, \eta_r). \quad (24)$$

Nimmt man z. B. als Interpolationspolynom (20) das Newtonsche Interpolationspolynom mit aufsteigenden Differenzen, so gilt

$$\gamma_q = \binom{u}{q} \text{ mit } u = \frac{x - x_r}{h} \quad (25)$$

und

$$R_{p+1} = \binom{u}{p+1} h^{p+1} f^{(p+1)}, \quad (26)$$

wobei $f^{(p+1)}$ die $(p+1)$ -te Ableitung von f an einer Stelle des die Punkte x_{r-p}, \dots, x_r und x enthaltenden Intervalles ist. Es ergibt sich weiter

$$\beta_q = \frac{1}{q!} \int_0^1 \binom{u}{q} du, \quad (27)$$

während für S_{p+1} die Abschätzung

$$|S_{p+1}| \leq h^{p+2} \beta_{p+1} |f^{(p+1)}|_{\max} \quad (28)$$

gilt. Somit erhält man mit

$$\eta_{r+1} = \eta_r + h \left(f_r + \frac{1}{2} V f_r + \frac{5}{12} V^2 f_r + \frac{3}{8} V^3 f_r + \dots \right) \quad (29)$$

eine Formel der numerischen Integration, die man als Adamssches Extrapolationsverfahren¹⁰ bezeichnet. Von einem Extrapolationsverfahren spricht man, wenn das Integrationsintervall in (4) nicht im Inneren des durch die Stützstellen des Interpolationspolynoms gegebenen Intervalls liegt. Im anderen Falle spricht man von Interpolationsverfahren. Diese zeichnen sich durch wesentlich größere Genauigkeit aus, sind allerdings auch komplizierter in der Rechnung, da bei ihnen die rechte Seite von (24) den noch unbekannten Funktionswert y_{r+1} enthält. In der Regel wird eine Auflösung nach diesem unbekannten Funktionswert nicht möglich sein, weshalb man zunächst diesen Wert (oder besser noch die höchste Differenz) schätzen und dann mittels der Formel des Verfahrens iterativ verbessern muß. Zu den Interpolationsverfahren gehören das Adamssche Interpolationsverfahren mit der Formel

$$\eta_{r+1} = \eta_r + h \left(f_{r+1} - \frac{1}{2} V f_{r+1} - \frac{1}{12} V^2 f_{r+1} - \frac{1}{24} V^3 f_{r+1} - \dots \right) \quad (30)$$

und das Verfahren der zentralen Differenzen von L. Collatz und R. Zurmühl¹¹ mit der Formel

$$\eta_{r+1} = \eta_{r-1} + h \left(2f_r + \frac{1}{3} V^2 f_{r+1} - \frac{1}{90} V^4 f_{r+2} + \dots \right). \quad (31)$$

Voraussetzung für die Anwendung eines Differenzenschemaverfahrens ist immer, daß bereits ein Anfangsstück für die Argumente x_0, x_1, \dots, x_p bekannt ist. Dieses kann durch Benutzung eines anderen Näherungsverfahrens oder durch Verwendung der Taylor-Entwicklung gewonnen werden. Es können auch eigene Iterationsschemata, wie etwa in¹² angegeben, benützt werden.

In einer Reihe von Arbeiten wurden Formeln für Differenzenschemaverfahren angegeben, die sich jeweils durch besondere Brauchbarkeit für bestimmte Zwecke auszeichnen. Es sei insbesondere, außer den schon genannten Veröffentlichungen, auf^{13, 14, 15} hingewiesen. In¹⁶ wurde von L. Collatz eine allgemeine Theorie für das Differenzenschemaverfahren bei Differentialgleichungen n -ter Ordnung gegeben.

Die Formeln für Differenzenschemaverfahren höherer Ordnung erhält man, indem man in Formel (20) statt $f(x, y)$ die Funktion $f(x, y, y', \dots, y^{(r-1)})$ nimmt und das so entstehende Interpolationspolynom wiederholt integriert. Als Beispiel sei nur das Formelsystem für das Verfahren der zentralen Differenzen bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegeben

$$\begin{aligned} \eta_{r+1} &= 2\eta_r - \eta_{r-1} + h^2 \left(f_r + \frac{1}{12} V^2 f_{r+1} + \dots \right) \\ \eta_{r+1}' &= \eta_{r-1}' + h \left(2f_r + \frac{1}{3} V^2 f_{r+1} + \dots \right). \end{aligned} \quad (32)$$

¹⁰ F. Bashforth-J. C. Adams: An Attempt to test Theories of Capillarity Action. Cambridge. 1883.

¹¹ L. Collatz-R. Zurmühl: Z. angew. Math. u. Mech. **22**, 42–55 (1942).

¹² S. Fußnote 1, S. 66.

¹³ C. Störmer: Z. Astrophysik **1**, 237–274 (1930).

¹⁴ G. Schulz: Z. angew. Math. u. Mech. **12**, 44–59 (1932).

¹⁵ E. Lindelöf: Acta Soc. Sci. fennicae. A 2, Nr. 13, 21 S (1938).

¹⁶ L. Collatz: Z. angew. Math. u. Mech. **29**, 199–209 (1949).

Zu einer Fehlerabschätzung bei den Differenzenschemaverfahren kann man auf folgende Weise kommen: Man ersetzt zunächst in (22) die Differenzen $\Delta^q f(x_r, y_r)$ nach (21) durch die Funktionswerte von $f(x, y)$ an den Stellen x_{r-p}, \dots, x_r , wodurch sich die Formel

$$y_{r+1} = y_r + h \sum_{q=1}^p \alpha_{pq} f(x_{r-q}, y_{r-q}) + S_{p+1} \quad (33)$$

ergibt. Analog erhält man aus (24) für die Näherungswerte

$$\eta_{r+1} = \eta_r + h \sum_{q=0}^p \alpha_{pq} f(x_{r-q}, \eta_{r-q}). \quad (34)$$

Dabei sind die α_{pq} wieder für das Näherungsverfahren charakteristische Konstanten. Sie lassen sich leicht aus den β_q bestimmen. Durch Subtraktion der Formel (34) von (33) erhält man mit (13) zunächst für den Fehler

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r+1} = y_{r+1} - \eta_{r+1} &= [y_r - \eta_r] + \left[\sum_{q=0}^p \alpha_{pq} (f(x_{r-q}, y_{r-q}) - f(x_{r-q}, \eta_{r-q})) \right] \\ &+ S_{p+1} = \text{I} + \text{II} + \text{III} \end{aligned} \quad (35)$$

Dabei stammt der durch I + II gegebene Fehleranteil von den Fehlern an den vorhergehenden Stellen, während III durch das Weglassen des Restgliedes der Interpolationsformel entsteht. Man spricht daher von Fortpflanzungsfehlern und von Integrationsfehlern.

Unter Berücksichtigung der Lipschitz-Bedingung (3) ergibt sich aus (35) die Abschätzung:

$$|\varepsilon_{r+1}| \leq |\varepsilon_r| + L \cdot \sum_{q=0}^p |\alpha_{pq}| \cdot |\varepsilon_{r-q}| + S_{p+1}, \quad (36)$$

wobei S_{p+1} durch (28) gegeben ist.

Für Differentialgleichungen n -ter Ordnung lautet die entsprechende Rekursionsformel:

$$|\varepsilon_{m+1}^{(j)}| \leq \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{q=0}^p |\alpha_{vq}^{(j)}| \cdot |\varepsilon_{m-q}^{(v)}| + |S_{p+1,j}| \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (37)$$

Dabei sind die Konstanten $\alpha_{vq}^{(j)}$ wieder durch das Näherungsverfahren gegeben und die $\varepsilon_m^{(j)}$ haben die in (15) erklärte Bedeutung.

Mit Hilfe der Formel (36) ist es möglich, den Fehler von η_{r+1} an der Stelle x_{r+1} abzuschätzen, wenn man den Fehler der Näherungswerte an den Stellen x_{r-p}, \dots, x_r kennt. Sind also die Fehler für das Anfangsstück x_0, x_1, \dots, x_p bekannt, so können nach dieser Formel rekursiv die Fehler für die nachfolgenden Stellen ermittelt werden. Die Bestimmung der Fehler für das Anfangsstück richtet sich naturgemäß nach der zur Berechnung verwendeten Näherungsmethode. Zur Abschätzung von S_{p+1} ist es notwendig, eine Schranke für die $(p+1)$ -te Ableitung der Funktion f zu kennen. Aus der Rekursionsformel für den Fehler läßt sich mit Hilfe der Theorie der linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten bzw. mit Hilfe der Matrizen-theorie eine Formel zur direkten Abschätzung des Fehlers gewinnen. Bei den Interpolationsverfahren verläuft die Fehlerabschätzung grundsätzlich genau so, allerdings sind gewisse Modifikationen notwendig.

Die im vorstehenden in den Grundzügen wiedergegebene Methode zur Fehlerabschätzung wurde für Differentialgleichungen erster Ordnung von R. v. Mises¹⁷

¹⁷ R. v. Mises: Z. angew. Math. u. Mech. **10**, 81–92 (1930).

angegeben, von G. Schulz¹⁸ und¹⁹ weiterentwickelt und von L. Collatz²⁰ auf Differentialgleichungen n -ter Ordnung erweitert. Neben den zitierten Arbeiten beschäftigt sich noch eine Reihe anderer mit diesem Problem. In dieser Hinsicht sei auf die ausführlichen Literaturangaben in ¹ verwiesen. Die Methode wurde hier natürlich nur in ihren Grundzügen wiedergegeben.

Die geschilderte Methode ist noch in mancher Hinsicht unbefriedigend. Zunächst wird nur der Verfahrensfehler erfaßt; nicht erfaßt werden jedoch andere Fehlermöglichkeiten, wie etwa Rundungsfehler. Weiters sind die Abschätzungen nur sehr grob, weil zur Abschätzung des Fortpflanzungsfehlers die Lipschitz-Bedingung in der Form (3) herangezogen wird, die sofort den Übergang zu Absolutbeträgen verlangt, so daß bei einer sich über eine Reihe von Schritten erstreckenden Abschätzung die Größenordnung des Fehlers beträchtlich verfälscht werden kann.

L. Vietoris gibt in ²¹ und ²² eine Methode an, mit deren Hilfe es möglich ist, den bei Anwendung des Adamsschen Interpolationsverfahrens sich ergebenden Defekt für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung oder für Differentialgleichungen höherer Ordnung zu bestimmen. Es werden auch Rundungsfehler berücksichtigt. Weiters hat H. Eltermann in ²³ die Anwendung einer Form der Lipschitz-Bedingung vorgeschlagen, die eine genauere Abschätzung des Fehlers gestattet. Diese Gedankengänge wurden von W. Uhlmann in ²⁴ und ²⁵ weiterverfolgt. Diese für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung und für Differentialgleichungen höherer Ordnung anwendbare Fehlerabschätzung führt unter Umständen zu wesentlich besseren Ergebnissen. Das Prinzip sei wieder an Hand der Anfangswertaufgabe (1), (2) erläutert. Die für einen gewissen Bereich $x_m \leq x \leq x_N$ ermittelten Näherungswerte η_j werden durch eine stetig differenzierbare Näherungslösung $\eta(x)$ verbunden, außerdem sei für diesen Bereich für den Defekt

$$d(x) = \eta'(x) - f(x, \eta(x)) \quad (38)$$

eine Schranke d_M mit

$$|d(x)| \leq d_M \text{ für } x_m \leq x \leq x_N \quad (39)$$

bekannt. Für den Fehler $\varepsilon(x_m)$ sei eine Schranke E bekannt

$$|\varepsilon(x_m)| \leq E. \quad (40)$$

Nun wird anstatt der Lipschitz-Bedingung (3) der Lipschitz-Quotient

$$L(x) = \frac{f(x, \eta(x)) - f(x, y(x))}{\eta(x) - y(x)} \quad (41)$$

eingeführt, der im Bereich $x_m \leq x \leq x_N$ stetig sei und der Abschätzung

$$L(x) \leq L \quad (42)$$

genüge. Diese Konstante L , die man anstatt der in (3) auftretenden Lipschitz-Konstanten benützt, kann nun auch negativ sein. Der Fehler $\varepsilon(x)$ genügt der linearen Differentialgleichung

$$\varepsilon'(x) = L(x) \cdot \varepsilon(x) + d(x). \quad (43)$$

¹⁸ S. Fußnote 14, S. 71.

¹⁹ G. Schulz: Z. angew. Math. u. Mech. **14**, 224—234 (1934).

²⁰ S. Fußnote 16, S. 71.

²¹ L. Vietoris: Sitzungsber. Öst. Akad. Wiss. Wien, IIa, **162**, 157—167 (1953).

²² L. Vietoris: Sitzungsber. Öst. Akad. Wiss. Wien, IIa, **162**, 293—299 (1953).

²³ H. Eltermann: Vortrag in Braunschweig, 20. I. 1951, wiedergeg. in ¹, 108—109.

²⁴ W. Uhlmann: Z. angew. Math. u. Mech. **37**, 88—99 (1957).

²⁵ W. Uhlmann: Z. angew. Math. u. Mech. **37**, 99—111 (1957).

Unter Verwendung der Abschätzungen (39), (42) läßt sich nun zeigen, daß die durch die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$E'(x) = L \cdot E(x) + d_M, \quad (44)$$

mit der Anfangsbedingung

$$E(x_m) = E \quad (45)$$

gegebene Funktion $E(x)$ im Bereich $x_m \leq x \leq x_N$ eine Schranke für den Fehler $\varepsilon(x)$ gibt

$$|\varepsilon(x)| \leq E(x). \quad (46)$$

Aus (44) und (45) ergibt sich für $E(x)$:

$$E(x) = \left(E + \frac{d_M}{L}\right) e^{L(x-x_m)} - \frac{d_M}{L}. \quad (47)$$

Voraussetzung zur Anwendung dieser Formel ist außer der Kenntnis der Konstanten L , daß Abschätzungen für den Defekt vorliegen. Dazu kann man entweder die von L. Vietoris für das Adamssche Interpolationsverfahren angegebene Schranke oder die von W. Uhlmann für dieses Verfahren und für das Verfahren der zentralen Differenzen angegebenen Schranken benützen.

Für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung werden die Lipschitz-Quotienten durch

$$L_{i,k}(x) = \frac{f_i(x, y_1(x), \dots, y_{k-1}(x), \eta_k(x), \dots, \eta_n(x)) - f_i(x, y_1(x), \dots, y_k(x), \eta_{k+1}(x), \dots, \eta_n(x))}{\eta_k(x) - y_k(x)} \quad (48)$$

definiert. Diese werden wieder als stetig vorausgesetzt und sollen der Abschätzung

$$l_{ik} \leq L_{ik}(x) \leq L_{ik}, \quad |L_{ik}(x)| \leq K_{ik} = \max\{|l_{ik}|, |L_{ik}|\} \quad (49)$$

genügen. Dann lautet die der Formel (43) analoge Beziehung

$$\varepsilon_i'(x) = \sum_{k=1}^n L_{ik}(x) \cdot \varepsilon_k(x) + d_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

und die durch das lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$E_i'(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n K_{ik} E_k(x) + L_{ii} E_i(x) + d_{i,M} \quad (51)$$

mit $E_i(x_m) = E_i$
und $|\varepsilon_i(x_m)| \leq E_i$

definierten Funktionen $E_i(x)$ sind nun wieder Schranken für die Fehler $\varepsilon_i(x)$

$$|\varepsilon_i(x)| \leq E_i(x). \quad (52)$$

Die $d_{i,M}$ sind wieder Schranken für die in (17) definierten Defekte

$$|d_i(x)| \leq d_{i,M}, \quad x_m \leq x \leq x_N. \quad (53)$$

Aus (51) erkennt man, daß in dieser Abschätzung die Schranken für die Lipschitz-Quotienten $L_{i,i}(x)$ dem Vorzeichen nach berücksichtigt werden, während dies für die anderen ($i \neq k$) nicht der Fall ist. Durch Anwendung linearer Transformationen lassen sich unter Umständen noch weitere Verbesserungen erzielen.

Im Falle einer Differentialgleichung n -ter Ordnung definiert man die Lipschitz-Quotienten sinngemäß

$$L_i(x) = \frac{f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(i-1)}(x), \eta^{(i)}(x), \dots, \eta^{(n-1)}(x)) - f(x, y(x), \dots, y^{(i)}(x), \eta^{(i+1)}(x), \dots, \eta^{(n)}(x))}{\eta^{(i)}(x) - y^{(i)}(x)} \quad (54)$$

Es gelte die Abschätzung

$$l_i \leq L_i(x) \leq L_i, \quad |L_i(x)| \leq K_i = \max \{ |l_i|, |L_i| \}. \quad (55)$$

Für die Fehler $\varepsilon^{(s)}(x)$ gilt die Gleichung

$$\varepsilon^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{s-1} L_k(x) \varepsilon^{(k)}(x) + d(x), \quad s = 0, 1, \dots, n-1 \quad (56)$$

und aus

$$E^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{s-2} K_k E^{(k)}(x) + L_{s-1} E^{(s-1)}(x) + d_M; \quad (57)$$

mit $E^{(i)}(x_m) = E^{(i)}$
und $|\varepsilon^{(i)}(x_m)| \leq E^{(i)}$

kann man wieder mit

$$|\varepsilon^{(i)}(x)| \leq E^{(i)}(x) \quad (58)$$

Schranken für die Fehler $\varepsilon^{(s)}(x)$ gewinnen. d_M ist wieder eine Schranke für den Defekt. Die Formeln (57) enthalten wieder die Glieder mit L_{s-1} , die die Schranken für die Lipschitz-Quotienten dem Vorzeichen nach berücksichtigen.

Es wird also durch die Methode erreicht, daß die Abschätzung des Fehlers wesentlich besser die Größenordnung wiedergibt, weil die Lipschitz-Quotienten — zumindest zum Teil — auch dem Vorzeichen nach berücksichtigt werden.

IV. Verfahren vom Typ des Runge-Kutta-Verfahrens

Das Prinzip des Runge-Kutta-Verfahrens, das in Abschnitt 2 schon angedeutet wurde, soll nun etwas näher am Fall der Differentialgleichung erster Ordnung (1), (2) erklärt werden. Der Funktionswert der exakten Lösung an der Stelle x_m sei y_m und es sei an der Stelle x_{m+1} ein Näherungswert η_{m+1} für y_{m+1} zu berechnen. Um nun das zur Gewinnung höherer Taylor-Glieder in (5) notwendige Differenzieren der Funktion $f(x, y)$ zu vermeiden, berechnet man für eine bestimmte Anzahl von Zwischenstellen

$$x_{m,i} = x_m + \delta_i h \quad 0 \leq \delta_i \leq 1 \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (59)$$

zunächst Grobwerte $\eta_{m,i}$ mit

$$\eta_{m,i} = y_m + h \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot f(x_{m,j}, \eta_{m,j}) \quad (60)$$

und daraus die zugehörigen Funktionswerte

$$f_{m,i} = f(x_{m,i}, \eta_{m,i}). \quad (61)$$

Der endgültige Näherungswert η_{m+1} wird dann durch Anbringen einer Korrektur, des Mittels K mit

$$K = h \cdot \sum_{i=0}^k \gamma_i \cdot f_{m,i} \quad (62)$$

ermittelt

$$\eta_{m+1} = y_m + K. \quad (63)$$

Die Konstanten α_{ij} und γ_i werden nun so bestimmt, daß die Taylor-Entwicklung von (63) mit der Taylor-Entwicklung (5) bis zu Gliedern möglichst hoher Ordnung übereinstimmt. Die sehr langwierige Rechnung kann hier nicht wiedergegeben werden. Besonders eingebürgert haben sich die von W. Kutta²⁶ angegebenen Formeln, bei denen ein Abgleich der Taylor-Glieder bis zur Ordnung h^4 einschließlich erzielt wird.

²⁶ W. Kutta: Z. Math. Phys. **46**, 435–453 (1901).

Es ist dort

$$k = 3, \delta_0 = 0, \delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}, \delta_3 = 1 \quad (64)$$

gewählt und die Formeln für die Errechnung der Zwischenwerte lauten

$$\begin{aligned} x_{m,0} &= x_m & \eta_{m,0} &= y_m & f_{m,0} &= f(x_{m,0}, \eta_{m,0}) \\ x_{m,1} &= x_m + \frac{h}{2} & \eta_{m,1} &= y_m + \frac{h}{2} f_{m,0} & f_{m,1} &= f(x_{m,1}, \eta_{m,1}) \\ x_{m,2} &= x_m + \frac{h}{2} & \eta_{m,2} &= y_m + \frac{h}{2} f_{m,1} & f_{m,2} &= f(x_{m,2}, \eta_{m,2}) \\ x_{m,3} &= x_m + h & \eta_{m,3} &= y_m + h f_{m,2} & f_{m,3} &= f(x_{m,3}, \eta_{m,3}) \end{aligned} \quad (65)$$

und als Formel für das Mittel wird verwendet

$$K = \frac{h}{6} (f_{m,0} + 2f_{m,1} + 2f_{m,2} + f_{m,3}). \quad (66)$$

Der Grundgedanke dieses Verfahrens stammt von C. Runge²⁷. Der Ansatz wurde von K. Heun²⁸ und W. Kutta²⁹ weiter ausgeführt. E. J. Nyström erweiterte³⁰ den Ansatz auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Systeme von solchen. R. Zurmühl gab in³¹ zunächst die Formeln für Differentialgleichungen dritter Ordnung und schließlich für Differentialgleichungen n -ter Ordnung³². Die von R. Zurmühl angegebenen Formeln stellen eine direkte Verallgemeinerung der Formeln (64), (65) und (66) dar. Wenn man wieder annimmt, daß die Näherungsrechnung für das Anfangswertproblem (8), (9) einer Differentialgleichung n -ter Ordnung bereits bis zur Stelle x_m gediehen sei, so ergibt sich zunächst zur Errechnung der Grobwerte der Formelsatz

$$\left. \begin{aligned} \eta_{m,0}^{(j)} &= \eta_m^{(j)} \\ \eta_{m,1}^{(j)} &= \sum_{\sigma=j}^{n-1} \frac{h^{\sigma-j}}{2^{\sigma-j}(\sigma-j)!} \eta_m^{(\sigma)} + \frac{h^{n-j}}{2^{n-j}(n-j)!} f_{m,0} \\ \eta_{m,2}^{(j)} &= \eta_{m,1}^{(j)} \quad j = 0, 1, \dots, n-2; \quad \eta_{m,2}^{(n-1)} = \eta_m^{(n-1)} + \frac{h}{2} f_{m,1} \\ \eta_{m,3}^{(j)} &= \sum_{\sigma=j}^{n-1} \frac{h^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!} \eta_m^{(\sigma)} + \frac{h^{n-j}}{(n-j)!} f_{m,2} \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (67)$$

mit

$$x_{m,0} = x_0, x_{m,1} = x_m, x_{m,2} = x_m + \frac{h}{2}, x_{m,3} = x_m + h$$

und

$$f_{m,i} = f(x_{m,i}, \eta_{m,i}, \eta_{m,i}', \dots, \eta_{m,i}^{(n-1)}).$$

Dabei ist jetzt bereits berücksichtigt (im Gegensatz zu den Formeln bei Differentialgleichungen erster Ordnung), daß an der Stelle x_m (mit Ausnahme von $m = 0$) ebenfalls nur Näherungswerte zur Verfügung stehen, weshalb $y_m^{(i)}$ durch $\eta_m^{(j)}$ ersetzt wurde.

Die Mittel K_m^j für die Ableitungen der Ordnung j werden nach den Formeln

$$K_M^j = \sum_{i=0}^3 \gamma_{ji} f_{m,i} \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (68)$$

²⁷ C. Runge: Math. Annalen **46**, 167–178 (1895).

²⁸ K. Heun: Z. Math. u. Phys. **45**, 23–38 (1900).

²⁹ S. Fußnote 26, S. 75.

³⁰ E. J. Nyström: Acta Soc. Sci. fennicae **50**, Nr. 13, S. 55 (1925).

³¹ R. Zurmühl: Z. angew. Math. u. Mech. **20**, 104–116 (1940).

³² R. Zurmühl: Z. angew. Math. u. Mech. **28**, 173–182 (1948).

berechnet, wobei für die Konstanten γ_{ji} zu setzen ist

$$\begin{aligned}\gamma_{j0} &= \binom{n}{n-j} \frac{(n-j)^2}{(n-j+1)(n-j+2)} \\ \gamma_{j1} = \gamma_{j2} &= \binom{n}{n-j} \frac{2(n-j)}{(n-j+1)(n-j+2)} \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \gamma_{j3} &= \binom{n}{n-j} \frac{2-(n-j)}{(n-j+1)(n-j+2)}.\end{aligned}\quad (69)$$

Dann können die endgültigen Näherungswerte für die Stelle x_{m+1} nach der Formel

$$\eta_{m+1}^{(j)} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \frac{h^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!} \eta_m^{(\sigma)} + K_m^j \frac{h^{n-j}}{(n-j)!} \quad (70)$$

berechnet werden. Der Formelsatz von Zurmühl liefert einen Abgleich der Taylor-Glieder bis zur Ordnung h^{n+2-j} für $j = 0, 1, \dots, n-2$ und h^4 für $j = n-1$. Für Systeme von Differentialgleichungen können die Formeln unmittelbar übernommen werden, wobei die Grobwerte an den einzelnen Stellen für alle Veränderlichen jeweils gleichzeitig zu berechnen sind, da sie zur Errechnung der Funktionswerte der Funktionen f gebraucht werden.

Der in den Formeln (59) bis (63) erläuterte Ansatz läßt sich noch allgemeiner gestalten (man vergleiche dazu³³). Dieser allgemeinere Ansatz wurde von J. Albrecht³⁴ und ³⁵ genauer untersucht. Es lassen sich auf diese Weise noch Formeln mit wesentlich größerer Genauigkeit finden.

Fordert man, daß die Zwischenstellen für die Grobwerte äquidistant liegen und die Grobwerte ebenfalls möglichst gute Näherungen sind, so gelangt man zum Verfahren von Blaess, das dieser in ³⁶ für Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegeben hat. Von R. Zurmühl wurde dieses Verfahren³⁷ näher untersucht. In ³⁸ wurde der Blaess'sche Ansatz durch Hinzunahme eines einfachen Korrekturgliedes verbessert und das Verfahren auf Differentialgleichungen n -ter Ordnung ausgedehnt. Die Formeln des Verfahrens von Blaess geben einen Taylor-Abgleich bis zu Gliedern der Ordnung h^{n+1-j} für $j = 0, 1, \dots, n-1$ beim ursprünglichen Blaess'schen Ansatz und bis zu Gliedern der Ordnung h^{n+2-j} beim verbesserten Ansatz.

Für das Runge-Kutta-Verfahren wurde erstmalig von L. Bieberbach in ³⁹ eine Fehlerabschätzung (ohne Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung) für Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben. C. Runge hatte⁴⁰ eine Möglichkeit der Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung angegeben. L. Bieberbach hat in ⁴¹ seine Betrachtungen auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ausgedehnt, die durch Rückführung auf ein solches System gelöst werden, ausgedehnt. Für Differentialgleichungen n -ter Ordnung, die direkt nach dem von R. Zurmühl angegebenen Formelsatz gelöst werden, wurde in ⁴² eine Fehlerabschätzung gegeben, die auch den Fortpflanzungsfehler berücksichtigt. O. Vejvoda hat in ⁴³ für Systeme von Differentialgleichungen genauere Abschätzungen des Integrationsfehlers unter Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung gegeben.

³³ S. Fußnote 1, S. 66.

³⁴ J. Albrecht: Diss. Hannover. 1954.

³⁵ J. Albrecht: Z. angew. Math. u. Mech. **35**, 100–110 (1955).

³⁶ V. Blaess: Z. Ver. dtsh. Ing. **81**, 587–596 (1937).

³⁷ S. Fußnote 31, S. 76.

³⁸ E. Bukovics: Öst. Ing.-Arch. **4**, 338–349 (1950).

³⁹ L. Bieberbach: Differentialgleichungen. 3. Aufl., S. 54. Berlin: Springer-Verlag. 1930.

⁴⁰ C. Runge: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 252–257 (1905).

⁴¹ L. Bieberbach: Z. angew. Math. u. Phys. **2**, 233–248 (1951).

⁴² E. Bukovics: Mh. Math. **57**, 333–350 (1953); **58**, 258–265 (1954).

⁴³ O. Vejvoda: Aplikaca Matematiky **2**, 1–23 (1957).

W. Gautschi hat in ⁴⁴ eine Abschätzung des Integrationsfehlers für Differentialgleichungen n -ter Ordnung nach dem Formelsatz von Zurmühl — unter anderen Voraussetzungen als in ⁴⁵ — gegeben.

Das Prinzip der Fehlerabschätzung sei — man vergleiche dazu ⁴⁶ — an Hand der Differentialgleichung erster Ordnung (1), (2) erklärt. Die Entwicklungen nehmen dabei aber gleich auf den allgemeinen Fall der Differentialgleichung n -ter Ordnung Rücksicht, so daß manches etwas komplizierter — als für den Fall $n = 1$ nötig — formuliert werden muß.

Nach (62) und (63) gilt, wenn man y_m durch η_m ersetzt, für den Näherungswert

$$\eta_{m+1} = \eta_m + h \cdot \sum_{i=0}^k \gamma_i f_{m,i}. \quad (71)$$

Für den exakten Wert hingegen gilt

$$y_{m+1} = y_m + A + B, \quad (72)$$

wobei A Glieder in der Taylorentwicklung von y_{m+1} sind, die beim Vergleich wegfallen, während B das durch

$$B = f_{\frac{IV}{5}}^{(IV)} \cdot \frac{h^5}{5!} \quad (73)$$

gegebene Restglied ist, wobei $f_{\frac{IV}{5}}^{(IV)}$ die vierte Ableitung von f , genommen an einer Stelle des Intervalls (x_m, x_{m+1}) ist. Nach geeigneter Erweiterung erhält man aus (13), (71) und (72)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m+1} = y_{m+1} - \eta_{m+1} &= \{y_m - \eta_m\} + \left\{ -h \sum_{i=0}^3 (f_{m,i} - \hat{f}_{m,i}) \right\} \\ &+ \left\{ A + B - \sum_{i=0}^3 \gamma_i \hat{f}_{m,i} \right\} = \text{I} + \text{II} + \text{III}. \end{aligned} \quad (74)$$

Dabei bedeuten die $f_{m,i}$ die tatsächlich auf Grund der Näherungswerte η_m und der sich daraus ergebenden Grobwerte errechneten Funktionswerte von f , während die $\hat{f}_{m,i}$ die Funktionswerte sind, die sich bei Verwendung der exakten Werte y_m zur Berechnung der Grobwerte ergeben hätten.

Die Abweichungen I und II rühren von der Fehlerfortpflanzung her, während III sich durch den Ersatz der Taylor-Reihe durch das Mittel ergibt (Integrationsfehler). Zunächst gilt

$$\text{I} = \varepsilon_m \quad (75)$$

und für II ergibt sich

$$|\text{II}| \leq K \cdot h \cdot \sum_{i=0}^3 |\gamma_i| |\varepsilon_{m,i}|, \quad (76)$$

wenn man die Lipschitz-Bedingung (3) anwendet und mit $\varepsilon_{m,i}$ die Abweichungen zwischen den auf Grund der exakten Werte y_m und der Näherungswerte η_m berechneten Grobwerte bezeichnet. Es läßt sich nun zeigen, daß (76) durch

$$|\text{II}| \leq K h \beta |\varepsilon_m| \quad \text{mit} \quad \beta = \sum_{i=0}^3 |\gamma_i| \alpha_i \quad (77)$$

⁴⁴ W. Gautschi: Z. angew. Math. u. Phys. **6**, 456—461 (1955).

⁴⁵ S. Fußnote 42, S. 77.

⁴⁶ S. Fußnote 42, S. 77.

abgeschätzt werden kann, wobei

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \alpha\left(\frac{h}{2}, K\right), \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2} h K (\alpha_1 - 1), \alpha_3 = \alpha(h, K) \quad (78)$$

mit

$$\alpha(h, K) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{h^\tau}{\tau!} + K \sum_{\tau=1}^n \frac{h^\tau}{\tau!} \quad (79)$$

zu setzen ist. Und zwar ist hier $n = 1$ zu nehmen.

Für den Integrationsfehler III ergibt sich

$$|\text{III}| \leq \frac{49}{2880} M_4 h^5 = J^*, \quad (80)$$

wobei M_4 eine Schranke für die vierte vollständige Ableitung von f und für die vierten Ableitungen der Funktionen $\hat{f}_{m,i}$ ist.

Insgesamt ergibt sich die Rekursionsformel

$$|\varepsilon_{m+1}| \leq (1 + K h \beta) |\varepsilon_m| + J^* \quad (81)$$

für den Fehler, aus der sich leicht die folgende Formel zur direkten Abschätzung des Fehlers nach m Schritten gewinnen läßt

$$|\varepsilon_m| \leq \frac{\sigma^m - 1}{\sigma - 1} \cdot \frac{49}{2880} M_4 h^5 \leq \frac{e^{mKh} - 1}{e^{Kh} - 1} \cdot \frac{49}{2880} M_4 h^5, \quad (82)$$

mit

$$\sigma = 1 + Kh + \frac{1}{2} (Kh)^2 + \frac{1}{6} K h^3 + \frac{1}{24} (Kh)^4. \quad (83)$$

Im Falle der Differentialgleichung n -ter Ordnung tritt an Stelle der Rekursionsformel (81) das System

$$|\varepsilon_{m+1}^{(j)}| \leq \sum_{v=0}^{n-1} \sigma_{j,v} |\varepsilon_m^{(v)}| + J_j^* \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (84)$$

wobei

$$\sigma_{j,v} = \frac{h^{v-j}}{(v-j)!} + \frac{j!}{n!} K \beta_j h^{n-j} \quad (85)$$

und

$$\beta_j = \binom{n}{n-j} \frac{1}{(n-j+1)(n-j+2)} [(n-j)^2 + 2(n-j)(\alpha_1 + \alpha_2) + |2-n+j|\alpha_3] \quad (86)$$

gilt und der Integrationsfehler durch

$$J_j^* = \begin{cases} \frac{12 + (n-j+3)(n-j+2|2-n+j|)}{12 \cdot (n-j+3)!} M_3 h^{n-j+3} & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ \frac{49}{2880} M_4 h^5 & j = n-1 \end{cases} \quad (87)$$

gegeben ist.

Die Abschätzung des Fehlers für das Verfahren von Blaess (einschließlich des Fortpflanzungsfehlers) findet sich in ^{46a}. Die dort zur Erleichterung der Rechnung beigegebenen Tabellen können auch — zumindest näherungsweise — zur Ermittlung der Größen β_j in (86) herangezogen werden.

^{46a} E. Bukovics: Mh. Math. 57, 217–245 (1953); 58, 258–265 (1954).

Die besondere Schwierigkeit der Fehlerabschätzung beim Runge-Kutta-Verfahren und in gleicher Weise auch beim Verfahren von Blaess besteht darin, daß zunächst die Grobwerte abgeschätzt werden müssen. Dazu ist die in (74) enthaltene Erweiterung notwendig, um die Größenordnung des Fehlers richtig wiederzugeben. Das führt aber bei der Abschätzung des Integrationsfehlers dazu, daß man entweder eine obere Schranke für die dritte bzw. vierte vollständige Ableitung von f , aber auch für die entsprechenden Ableitungen der $f_{m,i}$ verwenden muß, oder zu wesentlich komplizierteren Ausdrücken für die Fehler kommt. Weiters dürfte hier — soweit sich das zur Zeit beurteilen läßt — die Anwendung einer gemilderten Lipschitz-Bedingung, ähnlich wie dies beim Differenzenschemaverfahren geschehen ist, auf erheblich größere Schwierigkeiten stoßen, da es nicht ohne weiteres möglich ist, die an diskreten Stellen gewonnenen Näherungswerte zu einer Näherungslösung zusammenzufügen, die den zu fordernden Voraussetzungen genügt.

Bemerkt sei noch, daß man auch beim Fall der Differentialgleichung n -ter Ordnung aus dem Rekursionsformelsystem (84) eine Formel zur direkten Abschätzung des Fehlers finden kann.

V. Verwendbarkeit der Verfahren. Schlußbemerkungen

Zur Beurteilung der praktischen Brauchbarkeit der Verfahren müssen verschiedene Gesichtspunkte beachtet werden. Geht man zunächst von der Handlichkeit der Formeln, der Flüssigkeit des Prozesses und der erzielbaren Genauigkeit aus, so ist zu sagen, daß im allgemeinen die Differenzenschemaverfahren — und bei diesen die Interpolationsverfahren — vorzuziehen sein werden. Erweist sich jedoch ein Wechsel der Schrittweite als notwendig, so ist dieser beim Runge-Kutta-Verfahren leichter durchzuführen. Außerdem ist dieses Verfahren natürlich auch zur Ermittlung des Anfangsstückes bei Anwendung eines Differenzenschemaverfahrens von Bedeutung. H. Rutishauser berichtet in ⁴⁷ über Untersuchungen, die bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durchgeführt wurden. Die neben den analytischen Untersuchungen durchgeführten numerischen Rechnungen wurden auf der programmgesteuerten Rechenmaschine Z 4 der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich durchgeführt. Dabei wurde festgestellt, daß die durch direkte Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung erzielbare Genauigkeitssteigerung sich nur bei den ersten Schritten auswirkt, jedoch die Ordnung des über eine große Zahl von Schritten angewendeten Runge-Kutta-Verfahrens auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung nur h^4 ist. Dies ist übrigens auch aus der Rekursionsformel (84) zu erkennen, da dort auch bei allen Fehlern die Ableitung der Ordnung $(n - 1)$ auftritt und daher deren Ordnung h^4 den Ausschlag gibt. Ebenso zeigte es sich, daß bei den Differenzenschemaverfahren die Zahl der mitgeführten Differenzen und nicht die Ordnung der Differentialgleichung bei der Genauigkeitsordnung letzten Endes den Ausschlag gibt.

Zur Beurteilung eines Verfahrens ist auch noch ein anderer Gesichtspunkt — die Frage der Stabilität — maßgebend, auf den L. Collatz und R. Zurmühl im Falle des Verfahrens der zentralen Differenzen⁴⁸ und J. Todd⁴⁹ hingewiesen haben. H. Rutishauser hat in ⁵⁰ für diese Erscheinung eine Näherungstheorie aufgestellt. Es handelt sich dabei um folgendes: Durch die Differentialgleichung und das verwendete Näherungsverfahren wird eine Differenzengleichung induziert, die — hervorgerufen durch unvermeidliche Rundungsfehler — fremde Lösungen einschleppen kann, die zu starken

⁴⁷ H. Rutishauser: Z. angew. Math. u. Phys. **6**, 497—498 (1955).

⁴⁸ S. Fußnote ¹¹, S. 71.

⁴⁹ J. Todd: MTAC **4**, 39—44 (1950).

⁵⁰ H. Rutishauser: Z. angew. Math. u. Phys. **3**, 65—74 (1952).

Abweichungen vom exakten Wert führen können. Es zeigt sich, daß beim Runge-Kutta-Verfahren und auch beim Adamsschen Inter- und Extrapolationsverfahren bei genügend kleiner Schrittweite keine Instabilität zu befürchten ist, während beim Verfahren der zentralen Differenzen sogenannte Aufrauhungserscheinungen auftreten können. Die gefährlichen Gebiete bei diesem Verfahren hat L. Collatz in ⁵¹ bestimmt.

Gerade der Gesichtspunkt der Stabilität ist bei der Verwendung programmgesteuerter Rechenmaschinen von besonderer Bedeutung. Denn hier wird die Rechnung oft bei kleiner Schrittweite über eine große Zahl von Schritten geführt. Es muß hier besonders darauf gesehen werden, daß das Näherungsverfahren stabil ist. Über die im Zusammenhang mit der Verwendung von programmgesteuerten Rechenmaschinen auftretenden Fragen hat z. B. J. Heinhold in ⁵² und ⁵³ berichtet. Hier wird auch besonders darauf hingewiesen, daß gerade in diesem Zusammenhang die Frage einer kompletten Fehlerabschätzung besonders wichtig ist, die neben dem im vorhergehenden fast ausschließlich behandelten Verfahrensfehler auch noch die anderen Fehlermöglichkeiten, nämlich den Fehler in den Ausgangsdaten und besonders die durch das notwendige Aufrunden bewirkten Rundungsfehler berücksichtigt. Solche Fehler spielen bei den sogenannten selbstkorrigierenden Verfahren, zu denen alle Iterationsverfahren gehören, keine Rolle, wohl aber bei einfachen Verfahren, die mit sehr kleiner Schrittweite arbeiten, wie sie bei der Anwendung programmgesteuerter Rechenmaschinen bevorzugt werden. (Man vergleiche dazu auch ⁵⁴.)

Die traditionellen Methoden der Fehlerabschätzung haben den großen Nachteil, daß sie wohl die Fehlerschranken exakt angeben, jedoch in der Regel die Größenordnung des Fehlers nicht richtig erfassen und andererseits sehr mühsame und zeitraubende Rechnungen erfordern. Aus diesem Grunde wurde in den letzten Jahren versucht, durch Anwendung der Methoden der Mathematischen Statistik eine grundlegend neue Art der Fehlerabschätzung zu ermöglichen, die man als Stochastische Fehlerabschätzung bezeichnen kann. Bei dieser Art der Fehlerbetrachtung wird nicht mehr die Gesamtheit der zu betrachtenden Funktionen und Größen durch starre einschränkende Bedingungen in einen zulässigen und einen unzulässigen Teil zerlegt, wodurch die Menge der für den Fehler in Betracht kommenden Größen ebenfalls in einen möglichen und einen unmöglichen Teil zerfallen, sondern es werden die im Verfahren auftretenden Funktionen als zufällige Funktionen betrachtet, so daß für jedes Argument alle möglichen Funktionswerte, jedoch mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit auftreten können. Es sind dann exakte Lösung sowie Näherungslösung und damit der Fehler ebenfalls zufällige Größen. Unter gewissen Voraussetzungen über die zugrunde gelegten Verteilungen können nun Eigenschaften der Verteilung des Fehlers, wie Mittelwert und Streuung ermittelt werden, wodurch ein Vergleich verschiedener Verfahren ermöglicht wird. Diese Betrachtungen lassen sich auch auf die Bestimmung des Fehlers in den Ausgangsdaten und des Rundungsfehlers anwenden. Für einige Verfahren wurden diese Untersuchungen von Ch. Blanc⁵⁵ und von diesem gemeinsam mit W. Liniger⁵⁶ bereits durchgeführt.

Es konnte hier nur ein kleiner Einblick in die bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen auftretenden Fragestellungen gegeben werden, und zwar nur auf dem eng umgrenzten Gebiet der Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differen-

⁵¹ L. Collatz: Z. angew. Math. u. Phys. 4, 153—154 (1953).

⁵² J. Heinhold: Mitt. Math.-Labor 1, Heft 7, S. 1—9 (1954).

⁵³ J. Heinhold: MTW-Mitt. 3, 205—218 (1956).

⁵⁴ H. A. Rademacher: Annals Cambridge, Mass., 176—187 (1948).

⁵⁵ Ch. Blanc: Arch. d. Math. 5, 301—308 (1954).

⁵⁶ Ch. Blanc-W. Liniger: Z. angew. Math. u. Mech. 35, 121—130 (1955).

tialgleichungen. Es konnte nicht auf Randwertaufgaben und auf partielle Differentialgleichungen eingegangen werden. Es sei nur erwähnt, daß auch bei diesen Aufgaben-
gruppen die erwähnten Verfahren eine Rolle spielen, zu diesen jedoch auch mannigfache
andere hinzutreten. Eine umfassende Information und einen ins einzelne gehenden
Überblick in alle diese Fragestellungen geben, wie schon erwähnt, die Darstellungen⁵⁷
und ⁵⁸. (Eingegangen am 20. Mai 1958)

Zusatz bei der Korrektur: Während der Drucklegung dieser Veröffentlichung sind dem
Verfasser noch zwei Veröffentlichungen bekannt geworden, die wichtige Beiträge zum ange-
schnittenen Fragenkreis behandeln: K. H. Bachmann hat in seiner Dissertation (Dresden 1958),
die eine Übertragung des Runge-Kutta-Verfahrens auf partielle Differentialgleichungen erster
Ordnung enthält, eine Fehlerabschätzung für dieses Verfahren angegeben, die auf Gedanken-
gängen von P. Mathieu beim Differenzenschemaverfahren fußt. W. Liniger hat in seiner
Dissertation (Lausanne 1957) die Frage der Stabilität numerischer Näherungsverfahren unter-
sucht und insbesondere die hier noch in den Anfängen stehenden Begriffsbildungen einer
genauen Untersuchung unterzogen.

⁵⁷ S. Fußnote ¹, S. 66.

⁵⁸ S. Fußnote ², S. 66.

Über Eigenwertscharen

Von F. Buckens, Univ. Löwen

Mit 2 Textabbildungen

Zusammenfassung. Sehr allgemein wird eine lineare homogene selbstadjungierte Differential-
gleichung betrachtet, welche mit gegebenen Randbedingungen von einer Variablen abhängt, und die
auch linear mehreren Parametern λ_i enthält ($i = 1, \dots, r$). Bekanntlich existieren Eigenlösungen
solcher Differentialgleichungen nur, wenn charakteristische Beziehungen zwischen diesen Para-
metern entstehen. Diese „Eigenwertscharen“ bilden in dem λ -Raum charakteristische Flächen,
deren Eigenschaften berücksichtigt werden. Diese Eigenschaften können benützt werden zur
genäherten Eigenwertberechnung. Der Grenzfall $r = \infty$ (Hilbertscher Raum), führt zu dem Begriff
der charakteristischen Formen, welche nun durch unendlichen Eigenwertscharen dargestellt
sind. Zum Schluß werden einige einfache Beispiele besprochen.

Es seien: $M[y]$, $N_\varrho[y]$ ($\varrho = 1, 2, \dots, r$), gewöhnliche, lineare homogene Differential-
ausdrücke, die die r Eigenwertprobleme

$$M[y] = \lambda^{(\varrho)} N_\varrho[y] \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r) \quad (1)$$

bilden. Die Randbedingungen seien $U_\mu[y] = 0$, ($\mu = 1, 2, \dots, 2m$); wo $2m$ die Ord-
nung der Differentialgleichungen ist, hier mit M bezeichnet; der folgenden Arbeit legen
wir die Bezeichnungen von Collatz¹ zugrunde. Für alle Teilprobleme (1) seien die
Selbstadjungiertheit

$$\int_a^b (uM[v] - vM[u]) dx = 0 \quad \int_a^b (uN_\varrho[v] - vN_\varrho[u]) dx = 0 \quad (1a)$$

und die Volldefinitheitsforderungen

$$\int_a^b uM[u] dx > 0 \quad \int_a^b uN_\varrho[u] dx > 0 \quad (1b)$$

erfüllt. Dann gilt für jede positive Eigenwertschar ($\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)}$) des zusammen-
gesetzten Problems

$$M[y] = \sum_{\varrho=1}^r \lambda^{(\varrho)} N_\varrho[y] \quad (2)$$

¹ L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Geest u. Portig, 1949.
(Die Bezeichnungen dieses Buches werden hier benutzt.)

die bekannte Ungleichung:

$$\sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} / \lambda_1^{(q)} \geq 1 \quad (3)$$

mit $\lambda_1^{(q)}$ als jeweils kleinstem Eigenwert zu (1). Die gewöhnliche Theorie der Eigenwerte lehrt, daß zwischen den Parametern $\lambda^{(q)}$ charakteristische Beziehungen bestehen müssen, damit (2) von Null verschiedene Lösungen besitzt.

I. Erweiterung eines Templeschen Beweises der verallgemeinerten Formel von Dunkerley.

Formel (3) wurde von Temple (vgl. ²) im Falle der speziellen Eingliedklasse $N_q[y] = \sigma_q(s) \cdot y$ bewiesen. Sie läßt sich als unmittelbare Aussage der Dunkerleyschen Formel (vgl. ³) auf den allgemeinen Fall übertragen. Man benützt für jedes Teilsystem die Minimaleigenschaften der Rayleighschen Quotienten

$$\lambda_1^{(q)} \leq \int_a^b u M[u] dx / \int_a^b u N_q[u] dx$$

und setzt als Vergleichsfunktion u die zu den $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)})$ gehörenden Eigenfunktion $\Phi(x)$ ein

$$1/\lambda_1^{(q)} \geq \int_a^b \Phi N_q[\Phi] dx / \int_a^b \Phi M[\Phi] dx$$

Multiplikation mit $\lambda^{(q)} > 0$ und Summation über q liefert, nach (2),

$$\sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} / \lambda_1^{(q)} \geq \int_a^b \Phi \sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} N_q[\Phi] dx / \int_a^b \Phi M[\Phi] dx = 1.$$

Im Spezialfall $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \dots = \lambda^{(r)} > 0$ stimmt (3) mit der bekannten Dunkerleyschen Formel überein. Ungleichung (3) gilt für jede Eigenwertschar $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)})$. Für jedes Bezugssystem $f_v(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) = 0$, ($v = 1, 2, \dots, r-1$), könnte man die fundamentale Schar durch die Bedingung kennzeichnen, $\sum (\lambda^{(q)} / \lambda^{(q)})$ zu minimisieren. Durch Energiebetrachtungen bewies Massonnet (vgl. ⁴) die Ungleichung (3) für mechanische Systeme und wandte sie an, um Beziehungen zwischen Eigenfrequenzen und äußeren („axialen“) Kräften aufzustellen.

Diese Ungleichung verallgemeinert sich, indem man in Gl. (2) das Summenzeichen durch ein Integralzeichen ersetzt:

$$M[y] = \int_{s'}^{s''} \lambda(s) N[s; y] ds. \quad (4)$$

Berücksichtigt man die „Teilgleichung“

$$M[y] = \lambda(s) N[s; y] \quad (5)$$

mit den Randbedingungen der Gl. (4), $U_\mu[y] = 0$, wobei dieselben Forderungen wie unter (1, 1a, 1b) im ganzen Gebiet $s' \leq s \leq s''$ erfüllt sind, so ergibt sich

$$\int_{s'}^{s''} [\lambda(s) / \lambda_1(s)] ds \geq 1 \quad (6)$$

² G. Temple: The computation of characteristic numbers and characteristic functions. Proc. London Math. Soc. II, S-29, p. 268 (1929).

³ S. Fußnote 1, S. 387.

⁴ C. Massonnet: Les relations entre les modes normaux de vibration et la stabilité des systèmes élastiques. Bruxelles: Ed. Goemaere. 1940.

unter folgender Voraussetzung:

$$\lambda(s) > 0, \int_a^b u M[u] dx > 0, \int_a^b u N[s; u] dx > 0 \text{ für } s' \leq s \leq s''.$$

Ist $\zeta(s)$ eine in (s', s'') beliebige positive Funktion von s , mit $\Lambda(s) = \Lambda \cdot \zeta(s)$, so gilt:

$$M[y] = \Lambda \int_{s'}^{s''} \zeta(s) N[s; y] ds.$$

Gleich wie $M[y]$ und $N[s; y]$ ist auch $\int_{s'}^{s''} \zeta(s) N[s; y] ds$ eine lineare, homogene Funktion von y und dessen Ableitungen und erfüllt ebenfalls (1a, 1b).

Demzufolge existieren Eigenfunktionen Φ_1, Φ_2, \dots , mit den zugehörigen Eigenwerten $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ oder $\Lambda_1(s) = \Lambda_1 \cdot \zeta(s), \Lambda_2(s) = \Lambda_2 \cdot \zeta(s), \dots$

Zunächst gilt

$$1/\lambda_1(s) \geq \int_a^b \Phi_1 N[s; y] dx / \int_a^b \Phi_1 M[\Phi_1] \cdot dx \text{ für } s' \leq s \leq s''$$

wo λ_1 der erste Eigenwert von (5) ist. Multipliziert man beiderseits mit $\Lambda_1(s) ds (> 0)$ und integriert man von s' bis s'' , dann ergibt sich Ungl. (6).

Man erhält ein ähnliches Ergebnis, wenn die Eigenwertprobleme durch Integralgleichungen ausgedrückt werden. Der Unterschied stammt daher, daß die Randbedingungen der Teilprobleme nicht identisch zu sein brauchen. Es sei $\Phi(x)$ eine zur Charakteristikenschar $(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(r)})$ gehörende Eigenfunktion der Integralgleichung:

$$y(x) = \sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} \int_a^b K_q(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (7)$$

Dann gilt für jedes Teilproblem:

$$y(x) = \lambda^{(q)} \int_a^b K_q(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (8)$$

nach dem Rayleighschen Satz, die Ungleichung

$$1/\lambda_1^{(q)} \geq \int_a^b \int_a^b K_q(x, \xi) y(x) y(\xi) dx d\xi / \int_a^b y^2(x) dx. \quad (9)$$

Ersetzt man y durch Φ , so ergibt sich durch Summierung, nach vorheriger Multiplikation mit $\Lambda^{(q)}$, wiederum die Ungleichung (3). Hier sei bemerkt, daß von den Dungen (vgl. ⁵) in Beziehung auf Gleichung (7) die Bedeutung der Grenzgleichung $\sum (\Lambda^{(q)}/\lambda_1^{(q)}) \cong 1$ für die Anwendung gezeigt hat.

Bekanntlich gestattet die Benützung der Greenschen Funktion $G(x, \xi)$ die Umformung der Differentialform (1) in die Integralform (8) im speziellen Falle der Eingliedklasse

$$N[y] = (-1)^n \cdot [g_n(x) \cdot y^{(n)}]^{(n)}.$$

Vorausgesetzt, daß $g_n(x) > 0$, ergibt sich:

$$K(x, \xi) = \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(x) \cdot g_n(\xi)}.$$

Jedoch sei mit Nachdruck betont, daß die Teilgleichungen (1) dieselben Randbedingungen besitzen, was nicht unbedingt für $K_q(x, \xi)$ der Fall zu sein braucht. Ebenfalls sei die Möglichkeit einer Zerlegung von $G(x, \xi)$ eingeschlossen, die nicht unbedingt mit der von $g_n(x)$ übereinstimmt.

⁵ F. van den Dungen: Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. de Paris, T. 177, S. 243, 574, 677, 1923; Les équations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations. C. R. 2è Congrès Int. de Méc. Appl., Zürich. 1923.

Dieser Zerlegung von $G(x, \xi)$ entspricht die des Kernes

$$K(x, \xi) = \sum_{q=1}^r K_q(x, \xi).$$

Der Eigenwert λ in

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (10)$$

läßt sich mit Hilfe des Teilproblems

$$y(x) = \lambda^{(q)} \int_a^b K_q(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (11)$$

(das eventuell leichter lösbar ist), nach unten begrenzen:

$$\sum_{q=1}^r (1/\lambda_1^{(q)}) \geq 1/\lambda_1 \quad (12)$$

Überhaupt kann man diese Methode praktisch als eine Zerlegung der Einflußkoeffizienten kennzeichnen (vgl. ⁶). Es sei hier bemerkt, daß Gl. (7) schon von Schaefer (vgl. ⁷) in 2-Parameterproblemen benutzt wurde, um untere Schranken des kleinsten Eigenwertes zu suchen.

Eine der Gl. (4) ähnliche Verallgemeinerung führt uns zu folgender Integralgleichung:

$$y(x) = \int_a^b \left[\int_{s'}^{s''} \lambda(x) K(s; x, \xi) ds \right] y(\xi) d\xi \quad (13)$$

Gl. (6) gilt hierbei ebenfalls.

II. Die charakteristischen Flächen $F_n(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}) = 0$.

Die Beziehung, die zwischen den $A^{(q)}$ bestehen muß, um von Null verschiedene Lösungen für (2) zu sichern, kann im Koordinatensystem $(0, \lambda^{(1)}, 0, \lambda^{(2)}, \dots, 0, \lambda^{(r)})$ durch sogenannte charakteristische Flächen dargestellt werden (vgl. ⁸ und ⁹).

Wir werden für diese Flächen die folgenden Eigenschaften beweisen.

a) Die fundamentale charakteristische Fläche F_1 ist in bezug auf den Koordinaten-sprung 0 konkav, (vergl. [¹⁰] u. [¹¹]).

Für $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}$ positiv liegt, infolge der Ungleichung (3), (Abb. 1), die Ebene

$$\sum_{q=1}^r (\lambda^{(q)}/\lambda_1^{(q)}) = 1 \quad (14)$$

zwischen F_1 und 0. Diese Fläche schneidet die Achsen in den Punkten $(0, 0, \dots, \lambda_1^{(q)}, \dots, 0, 0)$, die sich auf der Ebene (14) befinden.

⁶ F. Buckens: Décomposition des coefficients d'influence dans les problèmes de vibration et de flambage. Bd. 7. Abh. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, S. 61. Zürich 1943/44; Auch: Dissertation Löwen. 1943.

⁷ H. Schaefer: Angenäherte Berechnung des kleinsten Eigenwertes zusammengesetzter Systeme. Z. f. angew. Math. u. Mech. **14**, 367 (1934); Beitrag zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes eindimensionaler Eigenwertprobleme. Dissertation T. H. Hannover. 1934.

⁸ S. Fußnote 5.

⁹ S. Fußnote 4, S. 85.

¹⁰ S. Fußnote 7, S. 6.

¹¹ S. Fußnote 4, S. 88.

Durch eine Koordinatentransformation

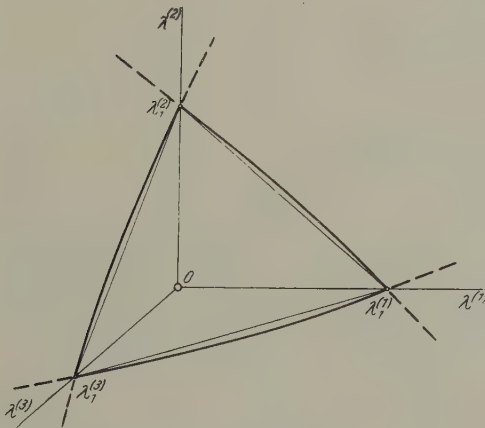


Abb. 1

$$\lambda^{(e)} = \sum_{\tau=1}^r a_{\tau}^e \cdot \eta^{(\tau)} \quad (15)$$

kann man (2) in

$$M[y] = \sum_{\tau=1}^r \eta^{(\tau)} \sum_{e=1}^r a_{\tau}^e N_e[y] \quad (16)$$

überführen. Die Koeffizienten a_{τ}^e müssen in Gl. (16) so gewählt werden, daß die Volldefinitheitsforderungen

$$\sum_{e=1}^r a_{\tau}^e \int_a^b y N_e[y] dx > 0 \quad (17)$$

erfüllt sind. Nehmen wir an, alle a_{τ}^e seien positiv; dann ist infolge von (1b) Gl. (17) erfüllt. Die neuen Achsen können dann so

gewählt werden, daß sie im Raum der positiven $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}$ ein willkürlich kleines Stück der Fläche F_1 aufschneiden, welche mit der Ebene

$$\sum_{\tau=1}^r (\eta^{(\tau)} / \eta_1^{(\tau)}) = 1 \quad (18)$$

die Punkte auf den Achsen gemeinsam hat. In dieser Gleichung stellen die $\eta_1^{(\tau)}$ die partiellen Eigenwerte von (16) dar. Da die Ebene (18) stets zwischen 0 und F_1 liegt, sieht man, daß F_1 konkav ist, zumindest in dem Gebiet, wo Ungleichung (3) gilt.

Es ist leicht zu beweisen, daß dasselbe auch im restlichen Gebiet der Fläche F_1 gilt, falls nicht alle $\lambda^{(e)}$ positiv sind.

Infolge der Bedingungen (1b) können nicht alle $\lambda^{(e)}$ gleichzeitig negativ sein. Man sieht dann, daß für jede Eigenwertschar $\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(r)}$ eine Translation

$$\lambda^{(e)} = -C^{(e)} + \eta^{(e)} \quad (19)$$

besteht, für welche die positiven Konstanten $C^{(e)}$ so gewählt sind, daß alle $\eta^{(e)}$ positiv werden, d. h. das betrachtete Flächenelement liegt nach der Translation im ersten Quadranten ($r=2$), Oktanten ($r=3$) usw.

Somit erhält man die Gleichung

$$M[y] + \sum_{e=1}^r C^{(e)} N_e[y] = \sum_{e=1}^r \eta^{(e)} N_e[y] \quad (20)$$

deren beide Seiten die Bedingung (1a, b) einzeln erfüllen, was die Konkavität der charakteristischen Fläche F_1 beweist.

b) Die charakteristischen Flächen F_n sind Hüllflächen der Ebenenfamilie

$$\sum_{e=1}^r \lambda^{(e)} \int_a^b u N_e[u] dx = \int_a^b u M[u] dx \quad (21)$$

wo die Vergleichsfunktion u (vergl. Def. in [12]) wie ein Parameter berücksichtigt wird.

¹² S. Fußnote 1, S. 48.

Variiert man (21), dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho=1}^r \lambda^{(\varrho)} \int_a^b \left[N_{\varrho} [u] \delta u + u \left(\frac{\partial N_{\varrho}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial N_{\varrho}}{\partial u'} \delta u' + \dots \right) \right] dx = \\ = \int_a^b \left[M [u] \delta u + u \left(\frac{\partial M}{\partial u} \delta u + \frac{\partial M}{\partial u'} \delta u' + \dots \right) \right] dx \end{aligned} \quad (22)$$

oder, infolge der Linearität von N_{ϱ} und M

$$\sum_{\varrho=1}^r \lambda^{(\varrho)} \int_a^b (N_{\varrho} [u] \delta u + u N_{\varrho} [\delta u]) dx = \int_a^b (M [u] \delta u + u M [\delta u]) dx \quad (23)$$

und schließlich, infolge der Selbstadjungiertheitsbedingungen (1a)

$$2 \sum_{\varrho=1}^r \lambda^{(\varrho)} \int_a^b N_{\varrho} [u] \delta u dx = 2 \int_a^b M [u] \delta u dx.$$

Da δu eine beliebige Funktion von x ist, folgt daraus genau die Gl. (2), die ihrerseits die Bedingungen $F_n (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}) = 0$ mit sich bringt.

Somit ist der Satz b) bewiesen.

Laut Definition liegt die fundamentale charakteristische Fläche F_1 in nächster Nähe des Nullpunktes 0. Die zweite Fläche F_2 wird die Rolle der fundamentalen Fläche spielen, wenn die Variation der Vergleichsfunktion durch ein Orthogonalisierungsverfahren beschränkt wird, welches in der Folge definiert werden soll.

Der Punkt $(A^{(1)} \dots A^{(r)})$ legt im λ -Raum mit dem Nullpunkt eine Richtung fest, die wir mit $A^{(\varrho)}$ bezeichnen. Mit der Wahl einer festen Richtung $A^{(\varrho)}$ ist man auf die Theorie der Eigenfunktionen mit einem Parameter (Länge des Vektors $A^{(\varrho)}$) zurückgeführt, und kann somit bekannte Folgen dieser Theorie benutzen sowie die Existenz einer Reihe von Eigenfunktionen y_1, y_2, \dots mit verschiedenen Eigenwerten $|A_1|, |A_2|, \dots$ beweisen. Es seien dann y_1 die fundamentale und y_2 die zweite Eigenfunktion, die der Richtung $A^{(\varrho)}$ entsprechen, dann ergibt sich nach (1a):

$$\int_a^b (y_2 M [y_1] - y_1 M [y_2]) dx = 0 \quad (24)$$

oder nach (2) und (1a):

$$\sum_{\varrho=1}^r (A_1^{(\varrho)} - A_2^{(\varrho)}) \int_a^b y_2 N_{\varrho} [y_1] dx = 0. \quad (25)$$

Nun sind $A_1^{(\varrho)}$ und $A_2^{(\varrho)}$, welche gleiche Richtung haben, verschieden, so daß

$$\sum_{\varrho=1}^r A^{(\varrho)} \int_a^b y_2 N_{\varrho} [y_1] dx = 0. \quad (26)$$

Für jede Richtung $A^{(\varrho)}$ wird eine Funktion y bezüglich der zugehörenden Eigenfunktion y_i orthogonal genannt, wenn die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^r \lambda^{(\varrho)} \int_a^b y N_{\varrho} [y_i] dx = 0 \quad (27)$$

und die Bedingung (1b) erfüllt sind. Die Funktion y ist zu der Funktion y_i auf der ganzen charakteristischen Fläche F_i orthogonal, wenn (27) für alle Richtungen gilt. Für charakteristische Flächen höherer Ordnung n muß die Variation der Vergleichsfunktion durch Orthogonalisierung bezüglich der Eigenfunktionen niedrigerer Ordnung ($i = 1, 2, \dots, n-1$) sowie für jede Richtung begrenzt werden.

Anmerkung 1. Wenn für eine gewisse Eigenwertschar $(A^{(1)} \dots A^{(r)})$ die zugehörige Eigenfunktion y_n die Bedingung

$$\sum_{\varrho=1}^r \mu^{(\varrho)} N_{\varrho} [y_n] = 0 \quad (28)$$

erfüllt, erhält man für y_n die charakteristische Linie

$$\lambda^{(q)} = \lambda^{(q)} + p\mu^{(q)} \quad (29)$$

mit p als Parameter. In (28) sind die $\mu^{(q)}$ konstant, welche nach (1b) verschiedene Vorzeichen besitzen. Gl. (29) beschreibt im λ -Raum eine Gerade, die auf der charakteristischen Fläche der Eigenwertschar $(\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(r)})$ liegt.

Anmerkung 2. Es ist bemerkenswert, daß die Variation der Gleichung (21) die Lösung des folgenden Extremalproblems liefert: nämlich die Vergleichsfunktion u zu finden, die den Ausdruck $\int_a^b u M[u] dx$, unter den Bedingungen $\int_a^b u N_q[u] dx = c_q$ ($q = 1, 2, \dots, r$; $c_q = \text{Konst.} > 0$), extremiert.

Die $\lambda^{(q)}$ sind dann Lagrangesche Multiplikatoren; ihre endgültigen Werte bilden die Eigenwertschar $(\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(r)})$, und somit einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene (21) steht.

Anmerkung 3. Aus den Sätzen a und b folgt: Für irgendeine Vergleichsfunktion u , die in die Gleichung (2) eingesetzt wird, ist der längs der Richtung λ zwischen dem Nullpunkt 0 und der Ebene (14) gemessene Abstand stets größer als die Länge des der Richtung λ zugehörigen kleinsten Eigenvektors $(\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(r)})$.

Anmerkung 4. Sind $\lambda_1^{(q)}$ die Grundwerte, und $\Phi_1^{(q)}(x)$ die entsprechenden Eigenfunktionen der partiellen Eigenwertprobleme (1), dann liegt die charakteristische Fläche F_1 , für positive Werte der $\lambda^{(q)}$, zwischen der Ebene (14) und den berührenden Ebenen

$$\sum_{\tau=1}^r \lambda^{(\tau)} \int_a^b \Phi_1^{(q)} N_\tau[\Phi_1^{(q)}] dx = \int_a^b \Phi_1^{(q)} M[\Phi_1^{(q)}] dx$$

wobei die Berührungspunkte der verschiedenen Flächen auf den Achsen liegen.

Anmerkung 5. Die Gestalt der charakteristischen Flächen F_n für große Werte der $\lambda^{(q)}$ wird durch die Betrachtung der Grenzgleichung

$$\sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} N_q[y] = 0$$

geliefert. Besitzt $N_1[y]$ die größte differentiale Ordnung q die unter den N_q erscheint, dann schreiben wir vorzugshalber:

$$N_1[y] = - \sum_{q=2}^r (\lambda^{(q)} / \lambda^{(1)}) N_q[y]. \quad (30)$$

Wenn diese Gleichung Eigenwertscharen $[(\lambda^{(2)} / \lambda^{(1)}), (\lambda^{(3)} / \lambda^{(1)}), \dots, (\lambda^{(r)} / \lambda^{(1)})]$ besitzt, bestehen konische charakteristische Flächen $k_n (\lambda^{(2)} / \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)} / \lambda^{(1)}) = 0$, die den Flächen F_n asymptotisch parallel sind.

Gewöhnlich gibt es verschiedene Randbedingungssysteme für (30), und zwar auf Grund des folgenden: Schreiben wir $y = Y + \varepsilon$, mit der Bedingung

$$\lim \varepsilon = 0, \text{ für } |\lambda^{(q)}| \rightarrow \infty$$

und es muß Y die Gleichung (30) befriedigen. Dann ergibt sich aus (2):

$$\sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} N_q[\varepsilon] - M[\varepsilon] = M[Y].$$

Unter den Randbedingungen $U_\mu[y] = 0$ müssen zuerst die Gleichungen berücksichtigt werden, welche die Parameter $\lambda_{(q)}$ enthalten:

$$U_\mu[y] \equiv V_\mu[y] + \sum_{q=1}^r \lambda^{(q)} W_{\mu q}[y] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, t).$$

Vorausgesetzt wird, daß t nicht größer als q ist, und daß die Abhängigkeit von $\lambda^{(e)}$ nur linear ist. So erhalten wir schon t -Randbedingungen für (30):

$$W_{v1} [Y] + \sum_{q=2}^r (\lambda^{(e)} / \lambda^{(1)}) W_{vq} [Y] = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, t) \quad (31)$$

so daß wir $(q - t)$ der restlichen Gleichungen $U_{t+i} = 0$ beliebig wählen können:

$$U_{t+1} [Y] = 0, \quad U_{t+2} [Y] = 0, \quad \dots \quad U_q [Y] = 0. \quad (32)$$

Es gibt also $(q - t)! / (2m - t)! (2m - q)!$ ähnliche Kombinationen, wenn $2m$ die Differentialordnung von M ist. Nicht alle werden lösbar. Systeme geben, jedoch erhält man gewöhnlich mit verschiedenen Randbedingungssystemen verschiedene konische Flächen k'_n, k''_n, \dots für jede Ordnung n .

Für jedes System (31), (32) besteht ein ergänzendes Randbedingungssystem für ε :

$$\sum_{q=1}^r \lambda^{(e)} W_{vq} [\varepsilon] + V_v [Y + \varepsilon] = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, t)$$

$$U_{t+1} [\varepsilon] = 0, \quad \dots \quad U_q [\varepsilon] = 0, \quad U_{q+1} [Y + \varepsilon] = 0, \quad \dots \quad U_{2m} [Y + \varepsilon] = 0$$

so daß das System $U_\mu [y] = 0$ stets befriedigt wird.

Es ist bemerkenswert, daß mit $\lambda^{(e)} / \lambda^{(1)} = -\kappa^{(e)}$, alle eventuellen Eigenwerte $\kappa_{(e)}$ der partiellen Gleichungen:

$$N_1 [y] = \kappa^{(e)} \cdot N_{(e)} [y] \quad (e = 2, 3, \dots, r) \quad (30a)$$

infolge (1b) positiv sind. Wir könnten im κ -Unterraum dieselben Eigenschaften für jede Schar $(\kappa^{(2)}, \kappa^{(3)}, \dots, \kappa^{(r)})$, wie für die $\lambda^{(e)}$ im λ -Raum beweisen. Zum Beispiel haben wir, wenn $\kappa_1^{(e)}$ ($e = 2, 3, \dots, r$) die Grundwerte von (30a) sind, die Näherungsformel:

$$\sum_{e=2}^r (\kappa^{(e)} / \kappa_1^{(e)}) \approx 1$$

oder

$$\lambda^{(1)} + \sum_{e=2}^r (\lambda^{(e)} / \kappa_1^{(e)}) \approx 0$$

welche für große Werte der $\lambda^{(e)}$ und für negative Werte der Quotienten $\lambda^{(e)} / \lambda^{(1)}$ gültig ist.

III. Beispiele

Die Quasilinearität der charakteristischen Beziehungen $F_n = 0$ wurde schon in praktischen Schwingungs- oder Stabilitätsproblemen benutzt (vgl. ^{13, 14}), um Näherungsformeln für Eigenfrequenzen oder Knicklasten zu bekommen. In der Folge werden wir einige weitere Beispiele behandeln, welche die vorherigen Betrachtungen erklären.

a) Als einfachstes Beispiel untersuchen wir den Fall eines schwingenden und axialgedrückten Stabes. Die Differentialgleichung lautet:

$$(\alpha y'')'' = -P y'' + \omega^2 m y \quad (33)$$

Dabei sind: α die Biegesteifigkeit, P die Axialkraft, ω die Kreisfrequenz, m die Masse

¹³ S. Fußnote 4, S. 151.

¹⁴ F. Buckens: Relations caractéristiques entre les valeurs critiques des forces radiales agissant sur les bords intérieurs et extérieurs d'une plaque annulaire. Bull. de la Soc. Franç. des Méc. 5, No. 15, p. 33 (1955).

pro Länge, y die Verrückung; α und m können Funktionen von x sein, wobei $0 \leq x \leq L$ (L : Länge des Stabes). Die allgemeine Form der Randbedingungen ist:

$$\sum_{\nu=0}^3 [A_{\mu\nu} y^{(\nu)}(0) + B_{\mu\nu} y^{(\nu)}(L)] = 0 \quad (\mu = 1 \text{ bis } 4) \quad (34)$$

wobei $A_{\mu\nu}$ und $B_{\mu\nu}$ Konstanten sind. Die Zerlegung von (33) in zwei Teilgleichungen:

$$(\alpha y'')'' = -P y'' \quad (35)$$

$$(\alpha y'')'' = \omega^2 m y \quad (36)$$

mit denselben Grenzgleichungen, ergibt die erste kritische Knicklast $\lambda_1^{(1)} = P_1$ und das Quadrat der ersten Eigenfrequenz des unbelasteten Stabes, $\lambda_1^{(2)} = \omega_1^2$. Nach (3) erhält man die bekannte Beziehung zwischen der Eigenfrequenz ω des belasteten Stabes und der Axiallast P , für P und ω^2 positiv:

$$P/P_1 + \omega^2/\omega_1^2 \geq 1. \quad (37)$$

Für α und m konstant, und unter den Randbedingungen

$$y(0) = \alpha y''(0) = y(L) = \alpha y''(L) = 0 \quad (38)$$

ergibt sich das Gleichgewichtszeichen:

$$P/P_n + \omega^2/\omega_n^2 = 1 \quad (39)$$

wobei, für (38), $P_n = n^2 \pi^2 \alpha / L^2$, und $\omega_n^2 = n^4 \pi^4 \alpha / m L^4$.

Es ist leicht zu sehen, daß der Fall (28) hier gewährleistet wird. Die Grenzgleichung (32) wird hier:

$$y'' = (\omega^2 m / P) y$$

woraus, mit

$$k^2 = -\omega^2 m / P > 0, \quad Y = A \sin(kx) + B \cos(kx). \quad (40)$$

Die verschiedenen Randbedingungspaare aus (38) liefern alle $B = 0$, und $k = n\pi/L$. Die Richtung der Asymptote $\omega^2/P = -n^2 \pi^2 / m L^2$ stimmt natürlich mit der Richtung der charakteristischen Geraden (39) überein.

Wir berücksichtigen zunächst einen an einem Ende eingespannten Stab, dessen anderes Ende frei beweglich ist:

$$y(0) = y'(0) = \alpha y''(L) = (\alpha y'')'_{x=L} + P y'(L) = 0 \quad (41)$$

Mit α und m konstant, erhalten wir wirklich die Ungleichung (37), wobei

$$P_1 = \alpha \pi^2 / 4 L^2, \quad \omega_1^2 = 12.3595 \alpha / m L^4.$$

Der asymptotische Verlauf der F_n wird durch (40) gegeben, mit Randbedingungen, in welchen die vierte Gleichung aus (41) stets eine Rolle spielt, weil sie den Parameter P enthält. Das Bedingungspaar $Y(0) = Y'(L) = 0$ in (40) eingesetzt, ergibt $B = 0$, $k = n\pi/2L$. Das Paar $Y'(L) = Y''(L) = 0$ würde die singuläre Lösung $k = 0$, $Y = B$ fordern. So erhält man zwei asymptotische Richtungen: $\omega^2/P = -n^2 \pi^2 / 4 m L^2$ und $\omega^2/P = -n^2 \pi^2 / m L^2$. Für die Grundfläche F_1 ergeben sich in Abb. 2 die entsprechenden Richtungen: $(P/P_1)/(\omega^2/\omega_1^2) = -2.03, (k')$; $(P/P_1)/(\omega^2/\omega_1^2) = -0.5075, (k'')$.

Für P und ω^2 positiv wird die charakteristische Kurve $F_1(P, \omega^2) = 0$ zwischen der

Geraden (39) und den Tangenten an F_1 in $(P_1, 0)$ und $(0, \omega_1^2)$ eingeschlossen. Die Gleichungen dieser Tangenten erhält man durch Einsetzen in (21), d. h. hier:

$$\omega^2 m \int_0^L y^2 dx + P \int_0^L y'^2 dx - P (yy') \Big|_0^L = \alpha \int_0^L y''^2 dx + (yy'') \Big|_0^L - (y'y'') \Big|_0^L \quad (42)$$

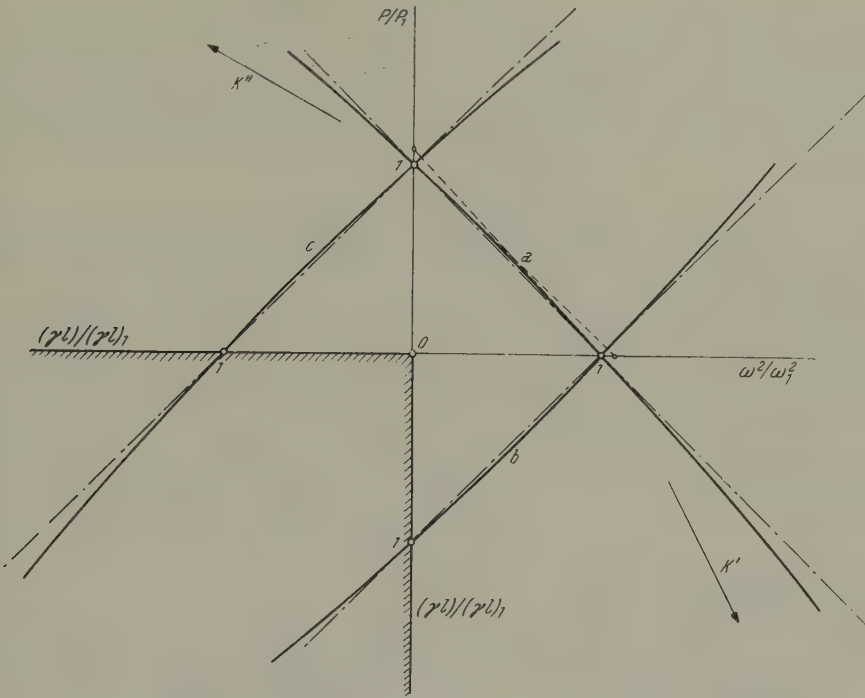


Abb. 2. 2-parametrische charakteristische Kurven

- a) eines schwingenden (ω^2) und axialgedrückten (P) Stabes
- b) eines schwingenden Stabes, mit axialen Längskräften γ
- c) eines durch End(P)- und Längs(γ)kräfte axialgedrückten Stabes

mit y als die den Eigenwerten P_1 und ω_1^2 entsprechenden Eigenfunktionen. Diese Funktionen sind, für $P = P_1$, $\omega^2 = 0$:

$$y = 1 - \cos (\pi x / 2 L) \quad (43)$$

und für $P = 0$, $\omega^2 = \omega_1^2$, (mit $k = 1.8751$, vgl. ¹⁵),

$$y = sh (kx / L) - \sin (kx / L) - 1.371 [ch (kx / L) - \cos (kx / L)]. \quad (44)$$

Wir erhalten dementsprechend:

$$\begin{aligned} \omega^2 m [(3/2) - (4/\pi)] + P (\pi^2 / 8 L^2) &= \alpha \pi^4 / 32 L^4 \\ \omega^2 m + P (46 \pi^2 / L^2) &= 12.36 \alpha \pi^4 L^4. \end{aligned}$$

Die zweiten Schnittpunkte dieser Tangenten mit den Achsen, Abb. 2, sind

$$P = 0, \omega_0^2 \cong 1.08 \omega_1^2, \text{ und } \omega^2 = 0, P_0 \cong 1.075 P_1.$$

Für den Verlauf der charakteristischen Kurve F_1 siehe auch ¹⁶.

¹⁵ S. Fußnote 4, S. 205.

¹⁶ S. Fußnote 4, S. 187.

b) Als zweites Beispiel fügen wir dem in a) betrachteten Stabe axiale Längskräfte zu, mit der Verteilung $\gamma(x)$. Die Gleichung wird:

$$(\alpha y'')'' = - \left[y' \int_x^L \gamma(\xi) d\xi \right]' - P y'' + \omega^2 m y, \quad (45)$$

wenn $\gamma(x)$ in derselben Richtung wie P positiv gezählt wird.

Es liegt ein 3-Parameterproblem vor, wobei α , m und γ konstant sind, und P , ω^2 und γ die Parameter $\lambda^{(e)}$ darstellen. Nehmen wir nochmals die Randbedingungen (41) an. Die partiellen 2-Parameterprobleme (P, ω^2) , (ω^2, γ) und (γ, P) werden dementsprechend in ¹⁷, ¹⁸ und ¹⁹ in Betracht gezogen. Die übereinstimmenden Kurven sind in Abb. 2 gezeichnet.

c) Wir erhalten ein ∞ -Parameterproblem, wenn in (45) $\gamma(x)$ als eine beliebige Funktion von x angesehen wird. Um diese Betrachtung zu vereinfachen, setzen wir in (45) P und ω^2 Null ein, und behandeln das Problem der Statik:

$$(\alpha y'')' = -y' \int_x^L \gamma(\xi) d\xi. \quad (46)$$

Diese Gleichung erhält die Form (4), wenn die Einheitsfunktion

$$U(\xi, x) = 0 \text{ für } \xi < x, \quad U(\xi, x) = 1 \text{ für } \xi \geq x \quad (47)$$

eingeführt wird:

$$(\alpha y'')' = -y' \int_0^L \gamma(\xi) U(\xi, x) d\xi. \quad (48)$$

Nun wird die Teilgleichung (5):

$$(\alpha y'')' = -y' \gamma(\xi) U(\xi, x) \quad (49)$$

d. h.

$$(\alpha y'')' = -y' \cdot \gamma(\xi) \text{ für } x \leq \xi, \text{ und } (\alpha y'')' = 0 \text{ für } x > \xi. \quad (50)$$

Der Gleichung (50) entspricht gerade das Problem eines axialgedrückten Stabes, wobei die Länge ξ und die Endkraft $\gamma(\xi)$ sind. Berechnet man die zugehörige erste Knicklast $\gamma_1(\xi)$, dann ergibt sich für die erste charakteristische Kraftverteilung $\Gamma(x)$ der Gleichung (48), nach (6):

$$\int_0^L [\Gamma(\xi)/\gamma_1(\xi)] d\xi \geq 1. \quad (51)$$

Mit α konstant und mit den Randbedingungen (41) ergibt sich beispielsweise $\gamma_1(\xi) = \alpha \pi^2/4 \xi^2$. Man erhält dann:

$$(4/\alpha \pi^2) \int_0^L \Gamma(\xi) \xi^2 d\xi \geq 1. \quad (52)$$

Für die gleichmäßige Verteilung, $\gamma(\xi) = \gamma_0$ konstant, bekommt man die Ungleichung:

$$\Gamma_1 \geq 3 \alpha \pi^2/4 L^3 = 0.750 \alpha \pi^2/L^3 \quad (53)$$

die man mit dem genauen Wert $\gamma_1 = 0.795 \dots \alpha \pi^2/L^3$ vergleichen kann, ²⁰.

¹⁷ S. Fußnote 4, S. 184.

¹⁸ K. Karas: Ing.-Arch. 1, 158–202 (1929).

¹⁹ N. Grishcoff: Bull. Acad. Sci. Kiev, 1930. (Vgl. Timoshenko: Theory of Elastic Stability. McGraw Hill, S. 118. 1936.)

²⁰ S. Fußnote 4, S. 122.

d) Die Stabilität von thermisch gespannten Platten kann auch als ein ∞ -Parameterproblem behandelt werden, wie anderswo gezeigt werden soll. Zum Schluß sei hier bemerkt, daß (30) die Grenzform eines interessanten singulären Störungsproblems darstellt, wo der Perturbationskoeffizient $(1/\gamma^{(1)})$ die höchsten Ableitungen von (2) durch M erfaßt. Für die vorangehenden Beispiele kann man auch sagen, daß die asymptotische Fläche mit dem Grenzfall eines vollkommen biegsamen Stabes ($\alpha \rightarrow 0$), d. h. eines Fadens, übereinstimmt.

(Eingegangen am 3. Juni 1958)

Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung¹

Von R. Gran Olsson, Trondheim

Mit 3 Textabbildungen

Die unter gleichem Titel erschienene Arbeit von Max A. Dengler¹ bedarf meines Erachtens einer Ergänzung, die ich im folgenden kurz erwähnen möchte.

Falls der Einfluß der transversalen Formänderung infolge der Schubspannungen berücksichtigt werden soll, ist zu beachten, daß zwei andere Formänderungseinflüsse etwa von derselben Größenordnung vorhanden sind, nämlich erstens der Einfluß des nichtlinearen Verlaufs der Biegespannungen σ_x und zweitens der Einfluß der transversalen Spannungen σ_y , die aus Gleichgewichtsgründen im allgemeinen nicht verschwinden. Faßt man diese Einflüsse zusammen, so ergibt sich für den rechteckigen Querschnitt die Größe (μ = Querdehnungszahl)

$$\lambda = \frac{1 + \mu}{\frac{6}{5} + \frac{3}{4}\mu} \quad (1)$$

Rechnet man mit dem in der Theorie der technischen Balkenbiegung üblichen, reziproken Wert $\kappa = 1/\lambda$, so wird dieser

$$\kappa = \frac{\frac{6}{5} + \frac{3}{4}\mu}{1 + \mu} \quad (2)$$

Die Aufspaltung der einzelnen Einflüsse ergibt

$$\kappa = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1 + \mu)} - \frac{3\mu}{4(1 + \mu)} \quad (3)$$

wobei das erste Glied den Einfluß der Schubspannung τ , das zweite Glied den Einfluß des nichtlinearen Verlaufs der Spannung σ_x und das letzte Glied den Einfluß der transversalen Spannung σ_y wiedergibt. Wie man sieht, ändert sich der Einfluß von σ_x von 0.3 bis 0.2, während der Einfluß von σ_y von Null bis 0.25 geht, wenn μ von Null bis 0.5 wächst. Der Einfluß der beiden letzten Glieder ist demnach von einer Größenordnung, die nicht vernachlässigt werden darf, sofern man auf die Größen zweiter Ordnung bei der Balkenbiegetheorie eingeht.

Die Größe κ läßt sich wie folgt schreiben

$$\kappa = \frac{3}{4} + \frac{9}{20(1 + \mu)} \quad (4)$$

oder auch

$$\left(\kappa - \frac{3}{4}\right)(1 + \mu) = \frac{9}{20} \quad (5)$$

¹ Max A. Dengler: Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. Österr. Ing.-Arch. 10, H. 1.

also eine einfache Hyperbel mit den beiden variablen Größen $\left(\kappa - \frac{3}{4}\right)$ und $(1 + \mu)$. Diese Hyperbel ist in Abb. 1 dargestellt, wobei der in Betracht kommende Bereich

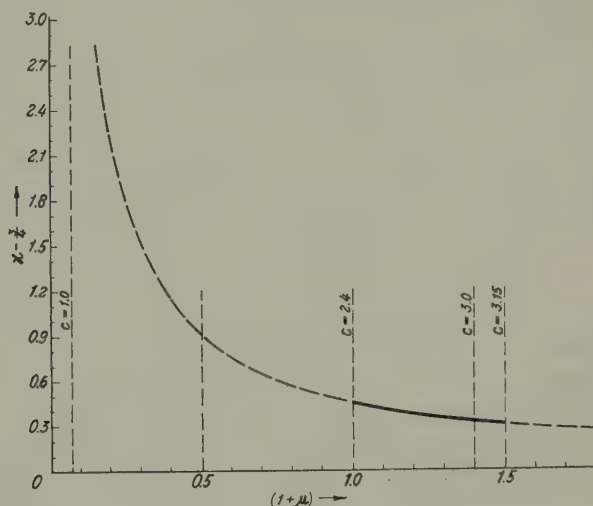


Abb. 1

von $\mu = 0.0$ bis $\mu = 0.5$ durch starke Linien besonders hervorgehoben ist. In Abb. 2 ist dieser Zweig der Funktion von μ und κ nochmals besonders wiedergegeben.

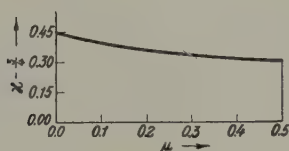


Abb. 2

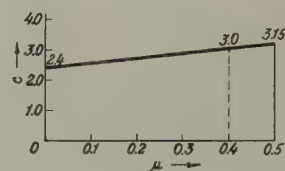


Abb. 3

Diese Betrachtungen sind für die numerische Auswertung der in den Abschnitten III und IV der genannten Arbeit mit Hilfe der Laplaceschen Transformation gegebenen Lösungen von Bedeutung. Der dort eingeführte Parameter $c = E/\lambda G$ kann, wenn die rotatorische Trägheit vernachlässigt wird, gesetzt werden

$$c = \frac{E}{\lambda G} = \frac{2(1+\mu)\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{4}\mu\right)}{(1+\mu)} = \frac{12}{5} + \frac{3}{2}\mu \quad (6)$$

Demnach wächst c von 2.4 bis 3.15 mit zunehmender Querdehnungszahl von Null bis 0.5. In Abb. 3 ist diese lineare Beziehung zwischen c und μ wiedergegeben.

Der angegebene Wert von λ stimmt für $\mu = 0.2$ mit dem von R. D. Mindlin² zwischen 0.8 und 0.9 vermuteten und von R. S. Ayre und L. S. Jacobsen berechneten Wert λ überein. Mit dem in Gl. (1) gegebenen Zusammenhang zwischen μ und λ kann letzterer Wert zwischen $0.83 \leq \lambda \leq 0.95$, also etwas schärfer als oben angegeben, abgegrenzt werden. Falls μ eine von der Querdehnungszahl etwas abweichende Bedeutung zugelegt wird, kann der Einfluß der rotatorischen Trägheit ebenfalls berücksichtigt werden.

² R. D. Mindlin: Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech. ASME (1950).

Demnach kann dem von Herrn Dengler durchgerechneten Fall $c = 1$ keine physikalische Bedeutung beigemessen werden, weil dies dem negativen Wert $\mu = -14/15$ entsprechen würde. Auf der anderen Seite ist $c = 4$ zu groß, während der für $c = 3$ durchgerechnete Fall der Querdehnungszahl $\mu = 0.4$ entspricht, einem Wert, der den meisten technischen Werkstoffen etwas zu hoch liegt, aber trotzdem ganz angemessen erscheint. Es würde sich vielleicht lohnen, numerische Rechnungen für $c = 2.4$ und $c = 3.15$ auszuführen, wonach man für alle übrigen Werte interpolieren könnte.

(Eingegangen am 2. Juli 1958)

Eine Lösung in Kettenbrüchen für die Kármánsche Theorie der Rohrbiegung

Von J. S. Frame, Michigan State University, U. S. A.

Zusammenfassung. Bei der Biegung eines gekrümmten dünnwandigen Rohres tritt nach der Kármánschen Theorie eine Formänderung des kreisförmigen Rohrquerschnittes ein, die das Biegemoment für eine gegebene relative Winkeländerung um einen Faktor $\kappa < 1$ vermindert.

Die komplizierten Kármánschen Näherungen für κ werden durch einen verhältnismäßig einfachen Kettenbruch dargestellt, und die zugehörige Rekursionsformel wird auch als Differenzengleichung gelöst.

1. Einleitung. An den beiden Endquerschnitten eines gekrümmten dünnwandigen Rohres mit kreisförmigem Querschnitt greife das Biegemoment M an. Dabei wird der Winkel α zwischen den beiden Endebenen um $\Delta\alpha$ geändert. In der üblichen Biegungstheorie hat dann das Verhältnis von M zu der relativen Winkeländerung

$$\tau = \Delta\alpha/\alpha \text{ den Wert } M/\tau = EJ/R, \quad \begin{array}{l} E = \text{Elastizitätsmodul des Stoffes} \\ J = \text{Trägheitsmoment des Querschnittes} \\ R = \text{Krümmungshalbmesser der Mittellinie.} \end{array} \quad (1)$$

Die Erfahrung zeigt aber, daß dieses Verhältnis zu groß ist. Man findet nämlich

$$M/\tau = (EJ/R) \kappa, \quad (2)$$

wobei $\kappa < 1$ eine Berichtigungsziffer bedeutet.

Von Kármán hat einen Weg zur Ermittlung dieser Berichtigungsziffer angegeben¹, indem er eine gewisse Formänderung des Rohrquerschnittes annimmt und die Formänderungsarbeit A pro Volumseinheit zum Minimum macht. Er setzt

$$\lambda = R\delta/r^2, \quad \begin{array}{l} \delta = \text{Dicke des Rohres} \\ r = \text{mittlerer Halbmesser des Rohrquerschnittes} \end{array} \quad (3)$$

und sucht das Minimum des Integrals

$$A = (E/2 R^2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[r \frac{\Delta\alpha}{a} \sin \varphi + w_t \cos \varphi - \frac{dw_t}{d\varphi} \sin \varphi \right]^2 + \frac{\lambda^2}{12} \left[\frac{d^3 w_t}{d\varphi^3} + \frac{dw_t}{d\varphi} \right]^2 \right\} d\varphi. \quad (4)$$

φ ist der Polarwinkel im Rohrquerschnitt. Indem er die tangentielle Verschiebung w_t eines Punktes P im Querschnitt als Fouriersche Reihe von der Form

$$w_t = c_1 \sin 2\varphi + c_2 \sin 4\varphi + \dots \quad (5)$$

¹ Th. v. Kármán: „Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsrohre“, Z. Ver. Deutsch. Ing. 55, S. 1889, 1911.

ansetzt und nur ein, zwei oder drei Glieder beibehält, bekommt er eine rasch komplizierter werdende Formel für κ , von welcher die zwei ersten Annäherungen lauten

$$\kappa_1 = 1 - \frac{9}{10 + 12 \lambda^2}, \quad \kappa_2 = 1 - \frac{102 + 3600 \lambda^2}{105 + 4136 \lambda^2 + 4800 \lambda^4} \quad (6)$$

Setzt man die ganze Reihe (5) in (4) ein, so erhält man eine Rekursionsformel für die c_n , die ziemlich verwickelt aussieht:

$$\frac{2n-3}{2n-1} c_{n-1} - \left[\frac{2n-1}{2n+1} + \frac{2n+1}{2n-1} + \frac{\lambda^2}{3} 4n^2 (4n^2 - 1) \right] c_n + \frac{2n+3}{2n+1} c_{n+1} = 0. \quad (7)$$

Wir wollen zeigen, wie man das einfacher machen und eine explizite Lösung für κ in Kettenbrüchen finden kann. Wir lösen dann auch eine Differenzengleichung und finden die Werte von κ für kleine Werte von λ .

2. Die Formänderungsarbeit. Seien (x, y) und $(r + \varrho, \varphi)$ die kartesischen und Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes P im Querschnitt des Rohres, und sei z eine zur Querschnittsebene senkrecht gemessene Koordinate längs der Mittellinie des Rohres. Wir nehmen an, daß z während der Biegung konstant bleibt.

Weiters seien ξ die Faserlänge für die z -Kurve durch P (auf welcher $\varrho = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$ und σ die analoge Faserlänge für die φ -Kurve durch P (auf welcher $\varrho = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$).

Die relativen Längsdehnungen dieser Fasern werden als

$$(\tau/\xi) d\xi/d\tau \quad \text{und} \quad (\tau/\sigma) d\sigma/d\tau$$

genommen. Hierbei ist $\xi = (R + y) \alpha$, und wenn K die Krümmung der φ -Fasern bedeutet, wird

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d(y\alpha)}{(R+y)\alpha}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{\varrho dK}{rK}. \quad (8)$$

Nach der gewöhnlichen Biegetheorie sind Biegemoment und Formänderungsarbeit pro Volumseinheit folgendermaßen ausgedrückt:

$$M = \int_S \int E \left(\frac{\tau}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \right) y dS = \frac{\tau E}{R} \int_S \int \frac{R}{R+y} \frac{d(y\alpha)}{d\tau} y dS = \frac{\tau E J}{R} \quad (9)$$

$$A = \frac{1}{S} \int_S \int \frac{E}{2} \left(\frac{\tau}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 dS = \frac{\tau^2 E}{2 R^2 S} \int_S \int \left[\frac{R}{R+y} \frac{d(y\alpha)}{d\tau} \right]^2 dS = \frac{\tau^2 E}{2 R^2 S} J = \frac{\tau M}{2 R S}, \quad (10)$$

wobei angenommen wird, daß y nicht von τ abhängt.

Nach der Kármánschen Theorie wird nun y als Funktion von τ betrachtet, wenn sich die Querschnittsform ändert. Außerdem kommt ein zweites Glied in der Formänderungsarbeit hinzu, entsprechend der Längsdehnung der φ -Fasern. Es wird

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{S} \int_S \int \left\{ \frac{E}{2} \left(\frac{\tau}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{\tau}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 \right\} dS \\ &= \frac{\tau^2 E}{2 R^2 S} \int_S \int \left\{ \left(\frac{R}{R+y} \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{R}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 \right\} dS = \frac{\tau^2 E J}{2 R^2 S} \kappa, \end{aligned} \quad (11)$$

wo κ die Berichtigungsziffer ist. Wenn man (8) und (3) in (11) einsetzt, und $J = S r^2/2$, $d\tau = d\alpha/\alpha$ setzt, bekommt man

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{2}{r^2 S} \int_S \int \left\{ \left(\frac{R}{R+y} \frac{d(y\alpha)}{d\tau} \right)^2 + \frac{\varrho^2}{\delta^2} \left(\frac{R}{rK} \frac{dK}{d\tau} \right)^2 \right\} dS \\ &= \frac{2}{S} \int_S \int \left\{ \left(\frac{R}{R+y} \right)^2 \left(\frac{y}{r} + \frac{1}{r} \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \frac{\varrho^2 \lambda^2}{\delta^2} \left(\frac{d \ln K}{d\tau} \right)^2 \right\} dS. \end{aligned} \quad (12)$$

Wie in den Gleichungen (9) und (10) wird auch hier $R/(R+y)$ durch $(R-y)/R$ ersetzt. Das lineare Glied fällt bei der Integration weg. Weiters wird, mit $dS = (r+\varrho)d\varrho d\varphi$, nach Integration über ϱ von $-\delta/2$ bis $+\delta/2$ näherungsweise ϱ^2/δ^2 durch den Mittelwert $1/12$ ersetzt.

Um später den Faktor 3 zu vermeiden, setzen wir

$$h^2 = \lambda^2/3, \quad h = R\delta/(r^2 \sqrt{3}) \quad (13)$$

Dann kann die Berichtigungsziffer κ als das Minimum des folgenden Integrals erhalten werden:

$$\kappa = \text{Min} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ f^2(\varphi) + g^2(\varphi) \} d\varphi, \quad (14)$$

wo

$$f(\varphi) = \frac{1}{r} \left(y + \frac{dy}{d\tau} \right), \quad (15)$$

$$g(\varphi) = \frac{h}{2} \frac{d \ln K}{d\tau}. \quad (16)$$

Um die Ausdrücke für f und g zu finden, führen wir ξ, η als neue Koordinaten eines Punktes im Querschnitt ein und setzen

$$(x + iy) = (1 + \xi + i\eta) r e^{i\varphi}, \quad u = d\xi/d\tau, \quad v = d\eta/d\tau. \quad (17)$$

Dann sind $ur\tau$ und $vr\tau$ die radialen und tangentiellen Verschiebungen des verschobenen Punktes P' gegenüber P , und

$$f(\varphi) = \frac{1}{r} \left(y + \frac{dy}{d\tau} \right) = \sin \varphi + v \cos \varphi + u \sin \varphi. \quad (18)$$

Wenn ein Punkt die Ableitung nach φ bedeutet, haben wir

$$\dot{x} + i\dot{y} = r [(\dot{\xi} - \eta) + i(1 + \xi + \dot{\eta})] e^{i\varphi} \quad (19)$$

$$(\dot{\sigma})^2 = r^2 [(1 + \xi + \dot{\eta})^2 + (\dot{\xi} - \eta)^2] \quad (20)$$

Für $\tau = 0$ soll die Ableitung nach τ von $(\dot{\sigma})^2$ gleich Null sein. Deshalb wird

$$\frac{d}{d\tau} (\dot{\xi} + \dot{\eta}) = u + \dot{v} = 0. \quad (21)$$

Für die Krümmung K der φ -Fasern haben wir

$$\dot{\sigma} K = \frac{d}{d\varphi} \arctan (\dot{y}/\dot{x}) = \frac{d}{d\varphi} \arctan \frac{1 + \xi + \dot{\eta}}{\dot{\xi} - \eta} + 1. \quad (22)$$

Für $\tau = 0$ wird $\dot{\sigma} = r$, und dabei wird

$$\dot{\sigma} \frac{dK}{d\tau} + K \frac{d\dot{\sigma}}{d\tau} \Big|_0 = \frac{d}{d\varphi} [(\dot{\xi} - \eta)(u + \dot{v}) - (1 + \xi + \dot{\eta})(\dot{u} - v)] \Big|_{\tau=0} \quad (23)$$

$$\frac{1}{K} \frac{dK}{d\tau} + u + \dot{v} = -\ddot{u} + \dot{v} \quad (24)$$

$$g(\varphi) = \frac{h}{2} \frac{d \ln K}{d\tau} = -\frac{h}{2} (u + \ddot{u}) = \frac{h}{2} (\dot{v} + \ddot{v}). \quad (25)$$

Wir entwickeln zunächst $g(\varphi)$ in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$g(\varphi) = -\frac{h}{2} (u + \ddot{u}) = h \sum'' a_n n \cos n\varphi, \quad (26)$$

wo \sum'' und \sum' bedeuten, daß nur über gerade bzw. ungerade n summiert wird.

Löst man die Gleichungen (26) und (21) nach u und v auf, so bekommt man

$$u = 2 \sum'' a_n n \cos n\varphi / (n^2 - 1) \quad (27)$$

$$v = -2 \sum'' a_n \sin n\varphi / (n^2 - 1). \quad (28)$$

Setzt man (27) und (28) in (18) ein, so folgt

$$f(\varphi) = \sin \varphi + \sum'' a_n \left[\frac{\sin (n+1) \varphi}{n+1} - \frac{\sin (n-1) \varphi}{n-1} \right]. \quad (29)$$

Definiert man jetzt

$$a_0 = 1, \quad (30)$$

so wird $f(\varphi)$ die folgende einfache Form haben:

$$f(\varphi) = \sum' \frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{n} \sin n\varphi. \quad (31)$$

Setzen wir jetzt f und g nach (31) und (26) in (14) ein, so wird

$$\kappa = \left[\sum' \left(\frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{n} \right)^2 + \sum'' h^2 n^2 a_n^2 \right] \quad (32)$$

wo $a_0 = 1$ und die anderen a_n so zu wählen sind, daß dieser Ausdruck ein Minimum wird.

3. Die Kettenbruchentwicklung von κ . Wir haben die Ableitungen von κ nach jedem a_n (n gerade) gleich Null zu setzen, um das Minimum von (32) zu erhalten. Wir bemerken zuerst, daß $\kappa - 1 + 2a_2$ eine homogene quadratische Funktion von a_2, a_4 usw. ist. Also wird

$$\kappa - 1 + 2a_2 = \sum'' \frac{a_n}{2} \frac{\partial(\kappa - 1 + 2a_2)}{\partial a_n} = \sum'' a_n \frac{\partial a_2}{\partial a_n} = a_2 \quad (33)$$

$$\kappa = 1 - a_2 \quad (34)$$

$$\frac{1}{2h} \frac{\partial \kappa}{\partial a_n} = \frac{a_n - a_{n+2}}{h(n+1)^2} - \frac{a_{n-2} - a_n}{h(n-1)^2} + h n^2 a_n = 0. \quad (35)$$

Jetzt wollen wir diese Gleichung vereinfachen, indem wir neue unbekannte Zahlen a_n für ungerade n einführen als Koeffizienten für $f(\varphi)$ in (31), so daß $f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ ähnlich aussehen. Als Definition nehmen wir für ungerade n

$$h n^2 a_n = a_{n-1} - a_{n+1}. \quad (36)$$

Dann werden die Glieder in (32) alle von gleicher Form und wir haben

$$\kappa = \sum_{n=0}^{\infty} h^2 n^2 a_n^2 = 1 - a_2 = h a_1. \quad (37)$$

Auch die Minimumsbedingungen (35) vereinfachen sich zu

$$a_{n+1} - a_{n-1} + h n^2 a_n = 0 \text{ für gerade } n \geq 2. \quad (38)$$

Damit gilt aber die Rekursionsformel (36) für gerade und ungerade n . Sie ist viel einfacher als (7) und man schreibt sie zweckmäßig in der Form

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = h n^2 + \frac{1}{(a_n/a_{n+1})}. \quad (39)$$

Wenn man diese Relation für $n = 1, 2, 3$ usw. schreibt, so bekommt man den Kettenbruch

$$\frac{\kappa}{h} = a_1 = \frac{1}{(a_0/a_1)} = \frac{1}{h + \frac{1}{4h + 1 + \frac{1}{9h + \frac{1}{(a_3/a_4)}}}} \quad (40)$$

Dieser Kettenbruch konvergiert schnell für $h > 1$, und er konvergiert für jeden positiven Wert von h . Aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, wenn h nach 0 geht. Man braucht nämlich ungefähr $2 h^{-1/2}$ Glieder des Kettenbruchs für $h < 1/4$, um eine gute Näherung zu bekommen.

Nach der Theorie der Kettenbrüche, wobei man

$$\frac{a_0}{1 + \frac{a_1}{1 + a_2}} = a_0 - \frac{a_0 a_1}{1 + a_1 + a_2} \quad (41)$$

setzt, kann man den Kettenbruch (40) folgendermaßen umformen

$$\kappa = 1 - \frac{3^2}{\mu + 3^2 + 1^2 - 1^2 5^2} \quad \mu = 36 h^2 = 12 \lambda^2 \quad (42)$$

$$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 \mu + 5^2 + 3^2 - 3^2 \cdot 7^2}{\left(\frac{7}{3}\right)^2 \mu + 7^2 + 5^2 -}$$

In dieser Form ist der Vergleich mit den ersten zwei Kármánschen Näherungen (6) leicht durchzuführen. Die dritte Näherung kann aus (42) leicht gerechnet werden.

Für kleines h wurden folgende Werte von $a_1 = \kappa/h$ berechnet:

$1/h$	5	6	7	8	9	12	15	20	100
κ/h	1.017,	1.0060,	1.0006,	.9987,	.9983,	.9996,	1.00024,	1.0004,	1.0000053

(43)

Es scheint also, daß κ/h nach 1 konvergiert, wenn h gegen 0 geht. Wenn das der Fall ist, wird aber jeder Koeffizient a_n wegen (36) gleichfalls nach 1 konvergieren für $h \rightarrow 0$. Wir untersuchen dies näher.

4. Die Differenzengleichung. Man kann die Rekursionsformel (36) als Differenzengleichung betrachten. Unter der Voraussetzung, daß $a_1(0) = 1$ und daß a_n in eine Potenzreihe in h entwickelbar ist, setzen wir an:

$$a_n = p_0(n) + p_1(n)(-h/2) + p_2(n)(-h/2)^2 + p_3(n)(-h/2)^3 + \dots \quad (44)$$

Weil $a_0 = 1$ ist, wird

$$p_j(0) = 0 \text{ für } j = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

Nach (36) haben wir

$$\sum_{j=0}^{\infty} h n^2 p_j(n) (-h/2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} [p_j(n-1) - p_j(n+1)] (-h/2)^j. \quad (46)$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von $(-h/2)^j$, so bekommen wir

$$p_j(n+1) - p_j(n-1) = 2 n^2 p_{j-1}(n). \quad (47)$$

Nach der Erfahrung in (43) nehmen wir an, daß $p_0(n) = 1$ ist. Dann haben wir für $j = 1, 2, 3$, die Differenzengleichung (47) zu lösen mit der Bedingung (45). Wir führen den Operator $D = d/dn$ ein und schreiben $e^D p(n)$ für $p(n+1)$ und $e^{-D} p(n)$ für $p(n-1)$. Dann ist

$$(e^D - e^{-D}) p_j(n) = 2 n^2 p_{j-1}(n). \quad (48)$$

Lösen wir diese Gleichung nach $p_j(n)$ auf, so bekommen wir

$$p_j(n) = \operatorname{csch} D n^2 p_{j-1}(n)$$

$$= \left(\frac{1}{D} - \frac{2 B_1}{2!} D + \frac{4^2 - 2}{4!} B_2 D^3 - \frac{4^3 - 2}{6!} B_3 D^5 + \dots \right) n^2 p_{j-1}(n) \quad (49)$$

wo B_k die Bernoullischen Zahlen bedeuten:

$$B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, B_4 = 1/30, B_5 = 5/66, B_6 = 691/2730, \dots \quad (50)$$

Dann wird weiter

$$p_j(n) = \left(\frac{1}{D} - \frac{D}{6} + \frac{7D^3}{360} - \frac{31D^5}{3 \cdot 7!} + \dots \right) n^2 p_{j-1}(n) \quad (51)$$

Der Operator $1/D$ ist als Integraloperator zu deuten, wobei die Integrationskonstante durch (45) bestimmt wird. Wir finden so

$$\begin{aligned} p_0(n) &= 1 \\ p_1(n) &= n(n^2 - 1)/3 \\ p_2(n) &= n^2(n^2 - 4)(2n^2 - 5)/36 \\ p_3(n) &= n(n^2 - 1)(n^2 - 9)(70n^4 - 725n^2 + 1591)/32 \cdot 9! \end{aligned} \quad (52)$$

Aus (51) und (52) sieht man, daß das Polynom $p_{2j-1}(n)$ eine ungerade Funktion, und das Polynom $p_{2j}(n)$ eine gerade Funktion von n ist. Es scheint ferner, daß $p_j(n)$ außer dem Faktor n auch die Faktoren $(n-j)$, $(n-j+2)$, $(n-j+4)$, \dots $(n+j)$ besitzt. Das werden wir beweisen, indem wir neue Polynome $q_j(n)$ vom Grad j einführen.

$$q_1(n) = n, \quad q_2(n) = n^2/2, \quad q_3(n) = n(n^2 - 1)/3, \quad q_4(n) = n^2(n^2 - 4)/4,$$

$$q_j(n) = (n/j) \prod_{k=1}^{j-1} (n - j + 2k). \quad (53)$$

Diese Polynome $q_j(n)$ genügen den folgenden Gleichungen.

$$q_{j+1}(n+1) - q_{j+1}(n-1) = 2jq_j(n) \quad (54)$$

$$q_{j+3}(n+1) - q_{j+3}(n-1) = 2(j+2)q_{j+2}(n) = (n^2 - j^2)2jq_j(n) \quad (55)$$

$$\begin{aligned} [j^{-1}q_{j+3}(n+1) + jq_{j+1}(n+1)] - [j^{-1}q_{j+3}(n-1) + jq_{j+1}(n-1)] = \\ = 2n^2q_j(n). \end{aligned} \quad (56)$$

Deshalb ist die Funktion

$$y_j(n) = j^{-1}q_{j+3}(n) + jq_{j+1}(n) \quad (57)$$

eine Lösung der Differenzgleichung

$$y_j(n+1) - y_j(n-1) = 2n^2q_j(n) \quad (58)$$

die der Bedingung $y_j(0) = 0$ genügt.

Jetzt können wir die Differenzgleichung (47) lösen, indem wir das Polynom $p_{j-1}(n)$ des Grades $3j-3$ durch die Polynome $q_{3j-3}(n)$, $q_{3j-5}(n)$, $q_{3j-7}(n)$ \dots ausdrücken, und die Gleichungen (58) und (57) anwenden. Wir sehen, daß $p_1 = q_3$ ist. Damit wird $p_2 = y_3$ nach (58), und daraus $p_2 = 3^{-1}q_6 + 3q_4$, nach (57). In analoger Weise sieht man, daß p_3 durch y_6 und y_4 , und deshalb durch q_9 , q_7 , q_5 ausdrückbar ist. Weil $q_{j+2}(n)$ durch $q_j(n)$ teilbar ist, folgt mittels Induktion, daß p_j durch q_{j+2} teilbar ist. Deshalb hat $p_j(n)$ im allgemeinen die Faktoren $(n-j)$, $(n-j+2)$, \dots $(n+j)$, wie (52) vermuten ließ.

Um jetzt eine explizite Lösung für die Polynome $p_j(n)$ zu finden, entnehmen wir aus (57), (58) und (47), daß

$$\begin{aligned} p_1 = q_3, \quad p_2 = (3, 3^{-1}) \begin{pmatrix} q_4 \\ q_6 \end{pmatrix}, \quad p_3 = (3, 3^{-1}) \begin{pmatrix} 4 & 4^{-1} & 0 \\ 0 & 6 & 6^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_5 \\ q_7 \\ q_9 \end{pmatrix} \\ p_4(n) = (3, 3^{-1}) \begin{pmatrix} 4 & 4^{-1} & 0 \\ 0 & 6 & 6^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_6(n) \\ q_8(n) \\ q_{10}(n) \\ q_{12}(n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

und daß im allgemeinen die j -Koeffizienten von q_{j+2} , $q_{j+4} \dots q_{3j}$ in $p_j(n)$ durch ein Produkt von $j-1$ solcher rechteckiger Matrizen ausdrückbar sind.

Für $n=1$ ist nach (53) $q_{2j-1}(1) = 0$ und

$$q_{2j}(1) = (-1)^{j-1} 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2j-3)^2 (2j-1)/2j. \quad (60)$$

Deshalb wird $p_{2j-1}(1) = 0$ und

$$\begin{aligned} p_2(1) &= (3, 3^{-1}) \begin{pmatrix} -3/4 \\ +3^2, 5/6 \end{pmatrix} = 1/4 \\ p_4(1) &= (3, 3^{-1}) \begin{pmatrix} 4 & 4^{-1} & 0 \\ 0 & 6 & 6^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^2, 5/6 \\ -3^2, 5^2, 7/8 \\ 3^2, 5^2, 7^2, 9/10 \\ -3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11/12 \end{pmatrix} \\ &= -(13)(15)/32. \end{aligned} \quad (61)$$

Wir haben also einen Ausdruck für das Verhältnis $\kappa/h = a_1$ für kleine Werte von h :

$$\kappa/h = a_1 = 1 + h^2/16 - 195 h^4/512 + 185623h^6/8192 - \dots \quad (62)$$

Leider wachsen die Koeffizienten dieser Reihe so stark an, daß die Konvergenz in Frage gestellt ist.

(Eingegangen am 9. Juli 1958)

Anwendung der verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten

Von K. Girkmann und R. Beer, Wien

Mit 2 Textabbildungen

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird die verschärfte Plattentheorie nach E. Reissner, welche auch die Querschubverzerrung berücksichtigt, auf orthotrope Platten ausgedehnt. Es wird ein Simultansystem von drei entkoppelten partiellen Differentialgleichungen sechster Ordnung für die Querkkräfte q_x , q_y und die Verschiebung w erhalten; die Gleichungen unterscheiden sich nur in den Störfunktionen. Das Integrationsproblem ist von sechster Ordnung und erlaubt die Erfüllung von drei Randbedingungen. Die Anwendung der erhaltenen Beziehungen wird am Beispiel des frei drehbar gelagerten Plattenstreifens unter Gleichlast dargelegt.

Die klassische Plattentheorie erlaubt bekanntlich nur die Erfüllung von zwei Randbedingungen. Nach einem Vorschlag von Thompson und Tait¹ werden daher an den Rändern zwei Schnittgrößen, nämlich das Drillungsmoment und die Querkraft, zu einer einzigen Schnittgröße -- Randquerkraft -- zusammengefaßt. In diesem Falle wird das Randdrillungsmoment durch ein statisch gleichwertiges Kräftepaar ersetzt, so daß nach de Saint Vénant die dadurch bedingte Abweichung in den inneren Kräften auf eine schmale Randzone der voraussetzungsgemäß dünnen Platte beschränkt bleibt.

Interessanterweise hat Prof. H. Reissner², der Vater E. Reissners, bereits 1926 in einer Besprechung des 1925 erschienenen Buches „Elastische Platten“ von Nadai die Vermutung ausgesprochen, daß die Unzulänglichkeit der klassischen Plattentheorie von der Vernachlässigung des Beitrages der Schubverzerrungen zu

¹ Thompson und Tait: Handbuch der Physik. Bd. 6, S. 211. Berlin: Springer. 1928.

² ZAMM 6, 500 (1926).

den lotrechten Verschiebungen der Plattenpunkte herrührt. E. Reissner³ hat diese Schubverzerrung berücksichtigt und eine Theorie der dünnen Platte entwickelt, die die strenge Erfüllung aller drei Randbedingungen ermöglicht. Die Herleitung erfolgt unter Benützung des Castiglianoschen Prinzips. Später haben Green⁴ (auf komplexem Wege) und Schäfer⁵ die Gleichungen der Reissnerschen Plattentheorie direkt unter Benützung der geometrischen und elastischen Beziehungen erhalten. In gleicher Weise wird hier die verschärfte Theorie für die orthotrope Platte entwickelt.

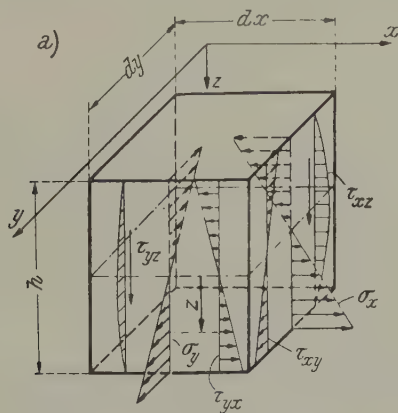


Abb. 1a

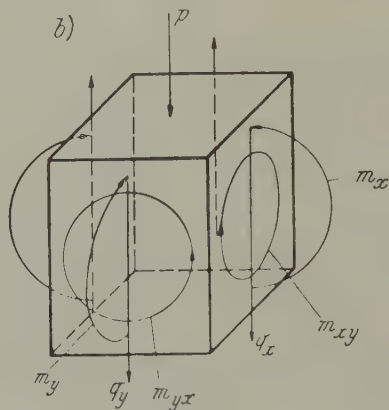


Abb. 1b

In Abb. 1a ist ein Plattenelement dargestellt; die vom umgebenden Werkstoff auf dieses Element ausgeübten inneren Kräfte (Spannungen) sind mit positivem Wirkungssinn eingetragen. Die Spannungen werden, wie in der klassischen Theorie, zu resultierenden Schnittgrößen zusammengefaßt (Abb. 1b).

$$q_x = -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad q_y = -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz, \quad (1)$$

$$m_x = -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad m_y = -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad (2)$$

$$m_{xy} = -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz. \quad (3)$$

Die Randbedingungen an den Plattenleibungen lauten

$$\begin{aligned} z = -\frac{h}{2}: \quad & \sigma_z = -p, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \\ z = +\frac{h}{2}: \quad & \sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei $p = p(x, y)$ die an der Leibung $z = -\frac{h}{2}$ angreifende Belastung pro Flächeneinheit ist.

³ E. Reissner: J. Appl. Mech. **12**, A 69—A 77 (1945).

⁴ A. E. Green: Quart. Appl. Math. **7**, 223—228 (1949).

⁵ M. Schäfer: ZAMM **32**, 161—171 (1952).

Aus den Gleichgewichtsbedingungen des räumlichen Spannungszustandes

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

folgt mit den Beziehungen (1) bis (4) und mit $X = Y = Z = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x &= 0, \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y &= 0, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Die Bestimmung dieser fünf Schnittgrößen ist somit eine zweifach statisch unbestimmte Aufgabe — im Gegensatz zum allgemeinen räumlichen Spannungsproblem, welches dreifach statisch unbestimmt ist. Die Verteilung der Spannungen über die Plattendicke h kann hieraus nicht ermittelt werden. Es werden hiefür die einfachen Annahmen der klassischen Theorie beibehalten:

$$\sigma_x = \frac{6m_x}{h^2} \frac{2z}{h}, \quad \sigma_y = \frac{6m_y}{h^2} \frac{2z}{h}, \quad \tau_{xy} = \frac{6m_{xy}}{h^2} \frac{2z}{h}, \quad \tau_{xz} = \frac{3q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad \tau_{yz} = \frac{3q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Diese Ansätze befriedigen die Gleichgewichtsbedingungen (5). Aus der dritten Gl. (5) bekommt man mit (7d, e), (6c) und (4)

$$\sigma_z = \frac{3p}{4} \left[\frac{2z}{h} - \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 - \frac{2}{3} \right]. \quad (8)$$

Zur weiteren Lösung der Aufgabe müssen nun die geometrischen und die elastischen Beziehungen herangezogen werden. Dabei zeigt sich allerdings, daß die getroffenen Annahmen (7) über die Spannungsverteilung i. a. den Kompatibilitätsbedingungen widersprechen. E. Reissner bestimmt daher die Verteilung der Schnittgrößen auf Grund des Castiglianoschen Prinzips. Wie eingangs erwähnt, wird hier die Methode von Schäfer angewendet, die auf die Erfüllung der dritten geometrischen und elastischen Bedingung verzichtet. Die Abweichungen der angenommenen Spannungsverteilung in der z -Richtung von der wirklichen werden nämlich zufolge der voraussetzungsgemäß kleinen Plattendicke h vernachlässigbar klein sein. (Dies ist übrigens dieselbe Vorgangsweise wie in der klassischen Plattentheorie.)

Bezeichnen wir die Verschiebungen in der x -, y - und z -Richtung mit U , V , W , dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E_x} [\sigma_x - \mu_{xy} \sigma_y - \mu_{xz} \sigma_z], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{E_y} [-\mu_{yx} \sigma_x + \sigma_y - \mu_{yz} \sigma_z], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{G_{zx}} \tau_{zx}.\end{aligned}\quad (9)$$

Der Unterschied zur klassischen Theorie zeigt sich darin, daß hier σ_z sowie γ_{yz} und γ_{zx} nicht mehr vernachlässigt werden. Außerdem geht hier die Richtungsabhängigkeit der Elastizitätskonstanten ein; für den isotropen Fall ist

$$E_x = E_y = E, \quad \mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{yx} = \mu_{yz} = \mu, \quad G_{xy} = G_{yz} = G_{zx} = G. \quad (10)$$

Faßt man (in ähnlicher Weise wie die Spannungen zu Schnittgrößen) die Verschiebungen U , V , W über die Plattenstärke zu resultierenden Formänderungsgrößen ω_x , ω_y , w zusammen, und zwar derart, daß sie mit den zugehörigen Schnittgrößen dieselben Beiträge zur Formänderungsenergie liefern wie die wirklichen Spannungen und Verschiebungen, dann gilt mit (7)

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} W dz &= q_x w, & w &= \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} W \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz; \\ -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x U dz &= m_x \omega_x, & \omega_x &= \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} U \frac{2z}{h} dz; \\ -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} V dz &= m_{xy} \omega_y, & \omega_y &= \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} V \frac{2z}{h} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Hiebei sind die W zu einer resultierenden Verschiebung w zusammengefaßt (wie die Spannungen τ_{xz} und τ_{yz} zu resultierenden Kräften), die Verschiebungen U und V hingegen zu den Winkelgrößen ω_x und ω_y (wie die Spannungen σ_x bzw. σ_y und τ_{xy} zu resultierenden Momenten). Der Zusammenhang zwischen den resultierenden Formänderungs- und Spannungsgrößen folgt dann aus

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{2z}{h} dz = \frac{6}{h^2 E_x} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\sigma_x - \mu_{xy} \sigma_y - \mu_{xz} \sigma_z] \frac{2z}{h} dz$$

mit (7) und (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{6}{h^2 E_x} \left\{ \frac{6 m_x}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{2z}{h} \right)^2 dz - \mu_{xy} \frac{6 m_y}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{2z}{h} \right)^2 dz - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{xz} \frac{p}{4} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[3 \left(\frac{2z}{h} \right)^2 - \left(\frac{2z}{h} \right)^4 - 2 \left(\frac{2z}{h} \right) \right] dz \right\}. \end{aligned}$$

Die Ausrechnung liefert

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{12}{h^3 E_x} \left(m_x - \mu_{xy} m_y - \frac{1}{10} \mu_{xz} p h^2 \right). \quad (12/1)$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{12}{h^3 E_y} \left(m_y - \mu_{yx} m_x - \frac{1}{10} \mu_{yz} p h^2 \right). \quad (12/2)$$

Weiters folgt mit (9/3) und (7/3)

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{2z}{h} dz = \frac{12}{h^3 G_{xy}} m_{xy}. \quad (12/3)$$

Außerdem wird noch der Zusammenhang zwischen den Querkraften q_x , q_y und den eingeführten Formänderungsgrößen benötigt. Hierzu stehen die beiden letzten elastischen Beziehungen (9) zur Verfügung. Bilden wir nun den Ausdruck

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz &= \frac{3}{2h} \left\{ -\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial U}{\partial z} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} W \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \right\} = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} U \frac{2z}{h} dz + \frac{\partial w}{\partial x} = \omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

[wobei nach partieller Integration von den Beziehungen (11) Gebrauch gemacht wurde], dann erhalten wir mit (9/5)

$$\omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2h G_{zx}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zx} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz.$$

Mit (7) folgt hieraus

$$\omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6}{5h G_{zx}} q_x \quad (12/4)$$

und analog ergibt sich

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6}{5h G_{yx}} q_y. \quad (12/5)$$

Die Beziehungen (6) und (12) stellen acht Gleichungen mit acht Unbekannten — die gesuchten Schnittkräfte m_x , m_y , m_{xy} , q_x , q_y und die durch (11) definierten Formänderungsgrößen ω_x , ω_y , w — dar.

Wie in der klassischen Theorie werden nun die Schnittgrößen durch die Verschiebung w ausgedrückt. Aus (12/1) und (12/2) folgt

$$m_x = \frac{h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})} \left[E_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + E_y \mu_{xy} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{6p}{5h} (\mu_{xz} + \mu_{yz} \mu_{xy}) \right].$$

Führen wir die Biegesteifigkeiten in der x - und y -Richtung

$$K_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}, \quad K_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{yx} \mu_{xy})} \quad (13)$$

ein, dann ergibt sich mit Benützung des Reziprozitätssatzes von Betti⁶

$$K_x \mu_{yx} = K_y \mu_{xy} \quad (14)$$

die erste der folgenden Gleichungen

$$m_x = K_x \left[\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \mu_{yx} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{6p}{5h} \frac{\mu_{xz} + \mu_{yz} \mu_{xy}}{E_x} \right], \quad (15/1)$$

$$m_y = K_y \left[\frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \mu_{xy} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{6p}{5h} \frac{\mu_{yz} + \mu_{xz} \mu_{yx}}{E_y} \right] \quad (15/2)$$

Die zweite wird auf analogem Wege gewonnen. Gemäß (12/3) ist

$$m_{xy} = \frac{h^3 G_{xy}}{12} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right). \quad (15/3)$$

⁶ Girkmann: Flächentragwerke, 4. Aufl., Gleich. (817). Wien: Springer-Verlag. 1956.

Die Beziehungen (15) ersetzen die Gl. (12/1) bis (12/3). Mit Hilfe von (12/4) und (12/5) kann man nun ω_x und ω_y eliminieren und man erhält

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -K_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + A_x \frac{\partial q_x}{\partial x} + B_x p, \\ m_y &= -K_y \left(\mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + A_y \frac{\partial q_y}{\partial y} + B_y p, \\ m_{xy} &= -\frac{h^3 G_{xy}}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_y \frac{\partial q_y}{\partial x} + C_x \frac{\partial q_x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{6K_x}{5h} \frac{G_{yz} - \mu_{yz} G_{zx}}{G_{yz} G_{zx}}, & B_x &= \frac{6K_x}{5h} \frac{(\mu_{xz} + \mu_{yz} \mu_{xy}) G_{yz} - \mu_{yz} E_x}{E_y G_{yz}}, \\ A_y &= \frac{6K_y}{5h} \frac{G_{zx} - \mu_{xy} G_{yz}}{G_{yz} G_{zx}}, & B_y &= \frac{6K_y}{5h} \frac{(\mu_{yz} + \mu_{xz} \mu_{xy}) G_{zx} - \mu_{xy} E_y}{E_y G_{zx}}, \\ C_x &= \frac{h^2}{10} \frac{G_{xy}}{G_{zx}}, & C_y &= \frac{h^2}{10} \frac{G_{xy}}{G_{yz}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wir haben nun die sechs Gleichungen (6) und (16) mit nur mehr sechs Unbekannten; die beiden Unbekannten ω_x und ω_y sind bereits eliminiert. Mit Hilfe der beiden ersten Gleichungen (6) können wir auch die restlichen Schnittgrößen q_x und q_y durch w ausdrücken. Eliminieren wir wieder mit (6/3) in q_x das q_y und umgekehrt und benützen wir die Hilfsgröße

$$H = K_x \mu_{yx} + \frac{h^3 G_{xy}}{6} = K_y \mu_{xy} + \frac{h^3 G_{xy}}{6} \quad (18)$$

so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} q_x &= - \left[K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial x} w + \left[(A_x - C_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] q_x + (B_x - C_y) \frac{\partial p}{\partial x}, \\ q_y &= - \left[H \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial y} w + \left[C_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_y - C_x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] q_y + (B_y - C_x) \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die dritte Gleichgewichtsbedingung liefert hiermit

$$\begin{aligned} & \left[K_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w - \left[(A_x - C_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial q_x}{\partial x} - \\ & - \left[C_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_y - C_x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial q_y}{\partial y} = \left[1 + (B_x - C_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_y - C_x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] p. \end{aligned} \quad (20)$$

Eliminiert man aus (20) entweder q_x oder q_y so entsteht

$$\begin{aligned} & \left[K_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w - \left[(A_x - 2C_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2C_x - A_y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial q_x}{\partial x} = \\ & = \left[1 + (B_x - 2C_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_y - A_y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] p, \end{aligned} \quad (21/1)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} & \left[K_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w - \left[(2C_y - A_x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_y - 2C_x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial q_y}{\partial y} = \\ & = \left[1 + (B_x - A_x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_y - 2C_x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] p. \end{aligned} \quad (21/2)$$

Vergleicht man die Ausdrücke (16), (19) und (20) mit den entsprechenden Beziehungen der Huberschen Theorie⁷, so zeigt sich, daß die Glieder, welche w enthalten,

⁷ Girkmann: Flächentragwerke, 4. Aufl., Gleich. (816), (818) mit (821) (822) u. (823).

jeweils übereinstimmen. Infolge der hier neu hinzukommenden Terme stellen die Gleichung (19) und (20) ein Simultansystem von drei partiellen Differentialgleichungen in q_x , q_y und w dar, während die Hubersche Theorie nur eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung (Plattengleichung) liefert. Zur Entkoppelung unserer Gleichungen schreiben wir (19) in der Form

$$- \left[K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial x} w + \left[(A_x - C_y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1 \right] q_x = (C_y - B_x) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (22/1)$$

$$- \left[H \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial y} w + \left[C_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_y - C_x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1 \right] q_y = (C_x - B_y) \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (22/2)$$

Betrachten wir die Beziehungen (21) und (22) als Gleichungen in w und q_x bzw. in w und q_y (wobei die Operatoren wie Faktoren behandelt werden), dann können wir sie nach den genannten Größen auflösen und erhalten

$$\begin{aligned} & \left\{ C_y K_x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + [A_x H + (A_y - C_x) K_x] \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + [A_y H + (A_x - C_y) K_y] \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \right. \\ & \quad \left. + C_x K_y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right\} w - \left[K_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w = \left\{ C_y (B_x - A_x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & \quad \left. + [A_x B_y + A_y B_x - A_x A_y - B_x C_x - B_y C_y] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + C_x (B_y - A_y) \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \right. \\ & \quad \left. + [A_x - B_x + C_y] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [A_y - B_y + C_x] \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1 \right\} p, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ C_y K_x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + [A_x H + (A_y - C_x) K_x] \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + [A_y H + (A_x - C_y) K_y] \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \right. \\ & \quad \left. + C_x K_y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right\} q_x - \left[K_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] q_x = \left\{ - K_x C_y \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \right. \\ & \quad \left. - [H B_x + K_x (A_y - B_y)] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + [(B_y - A_y) H + (C_y - B_x) K_y] \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \right. \\ & \quad \left. + K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ C_y K_x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + [A_x H + (A_y - C_x) K_x] \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + [A_y H + (A_x - C_y) K_y] \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \right. \\ & \quad \left. + C_x K_y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right\} q_y - \left[K_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 H \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] q_y = \\ & = \left\{ [(B_x - A_x) H + (C_x - B_y) K_x] \frac{\partial^4}{\partial x^4} - [B_y H + (A_x - B_x) K_y] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \right. \\ & \quad \left. - C_x K_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + H \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (25)$$

Damit haben wir drei entkoppelte partielle Differentialgleichungen sechster Ordnung für w , q_x und q_y , die sich nur in den Störfunktionen unterscheiden. Dabei geht überdies die Störfunktion von (25) aus jener von (24) durch Vertauschen von x und y hervor, d. h. ein partikuläres Integral von (24) ergibt durch dieselbe Vertauschung ein solches von (25). Somit ist im wesentlichen eine Differentialgleichung mit zwei verschiedenen Störfunktionen zu lösen. Zur Erfüllung der Randbedingungen wird die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung benötigt. Da die Entkoppelung der Differentialgleichungen durch eine Erhöhung der Ordnung erreicht wurde, ist zu beachten, daß die allgemeine Lösung auch den nicht entkoppelten Gleichungen (19) und (20) bzw. (21) genügen muß. Dadurch wird die Mannigfaltigkeit der Lösungen wieder auf das erforderliche Maß eingeschränkt. Das Integrationsproblem ist somit von sechster Ordnung (also um zwei Ordnungen höher wie in der klassischen Theorie) und ermöglicht daher die Erfüllung von drei Randbedingungen.

Beispiel. Betrachten wir den einfachen Fall des frei drehbar gelagerten Plattenstreifens unter Gleichlast (Abb. 2), so ist keine Abhängigkeit von y vorhanden ($\frac{\partial^n}{\partial y^n} \equiv 0$, $n = 1, 2, 3 \dots$) und die dritte Gleichgewichtsbedingung (6) lautet

$$\frac{d q_x}{d x} + p = 0.$$

Wegen $p = \text{konst.}$ folgt daraus

$$\frac{d^n q_x}{d x^n} = 0, \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

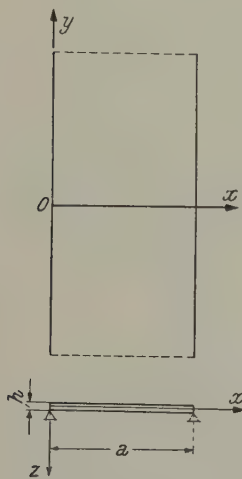


Abb. 2

Damit sind hier die Gleichungen (19) und (20) entkoppelt, wobei der von Gleichung (20) verbleibende Anteil die Plattengleichung der Huberschen Theorie darstellt. Man könnte also bei der Behandlung dieses Beispiels genau so vorgehen wie in der klassischen Theorie, wobei allerdings zu beachten ist, daß die Kopplung zwischen der Durchbiegung und den Querkräften vermöge der Randbedingungen bestehen bleibt. Zwecks Erläuterung wollen wir jedoch auch in diesem einfachen Fall von den Gleichungen (22) bis (25) ausgehen.

Zunächst folgt aus (22)

$$q_x = -K_x \frac{d^3 w}{d x^3}, \quad C_y \frac{d^2 q_y}{d x^2} - q_y = 0 \quad (a)$$

und die Gleichungen (23), (24) und (25) lauten hier

$$\left. \begin{aligned} C_y K_x \frac{d^6 w}{d x^6} - K_x \frac{d^4 w}{d x^4} &= -p, \\ C_y K_x \frac{d^6 q_x}{d x^6} - K_x \frac{d^4 q_x}{d x^4} &= 0, \\ C_y K_x \frac{d^6 q_y}{d x^6} - K_x \frac{d^4 q_y}{d x^4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Die erste Gleichung besitzt das partikuläre Integral

$$w_1 = \frac{x^4 p}{24 K_x}$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung erhält man mit Hilfe des Ansatzes $w_0 = e^{\lambda x}$. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$C_y \lambda^6 - \lambda^4 = 0$$

mit

$$\lambda_0, 1, 2, 3 = 0, \quad \lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{C_y}}, \quad \lambda_5 = -\frac{1}{\sqrt{C_y}}$$

als Lösungen. Somit ergibt sich

$$w = w_0 + w_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 e^{x/\sqrt{C_y}} + \alpha_5 e^{-x/\sqrt{C_y}} + \frac{x^4 p}{24 K_x}. \quad (c)$$

Da die Gleichungen für q_x und q_y identisch sind mit der homogenen Gleichung für w , erhält man

$$q_x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 e^{x/\sqrt{C_y}} + \beta_5 e^{-x/\sqrt{C_y}}, \quad (d)$$

$$q_y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 e^{x/\sqrt{C_y}} + \gamma_5 e^{-x/\sqrt{C_y}}. \quad (e)$$

Diese Lösungen enthalten 18 Integrationskonstante, die aber nicht alle unabhängig voneinander sind. Die Bindungsgleichungen zwischen den voneinander abhängigen Integrationskonstanten erhält man durch Einsetzen in die — im allgemeinen Fall nicht entkoppelten — Gleichungen (a).

Setzt man (e) in die zweite Gleichung (a) ein, so folgt

$$C_y (2\gamma_2 + 6\gamma_3 x) + \gamma_4 e^{+x/\sqrt{C_y}} + \gamma_5 e^{-x/\sqrt{C_y}} - \\ - \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 e^{+x/\sqrt{C_y}} + \gamma_5 e^{-x/\sqrt{C_y}} \equiv 0,$$

bzw.

$$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0. \quad (f)$$

Weiters ergibt sich mit (c) und (d) aus der ersten Gleichung (a)

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 e^{+x/\sqrt{C_y}} + \beta_5 e^{-x/\sqrt{C_y}} = \\ = -6 K_x \alpha_3 - px - \alpha_4 \frac{K_x}{\sqrt{C_y}^3} e^{+x/\sqrt{C_y}} + \alpha_5 \frac{K_x}{\sqrt{C_y}^3} e^{-x/\sqrt{C_y}},$$

bzw.

$$\beta_0 + 6 K_x \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 + p = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \\ \beta_4 + \alpha_4 \frac{K_x}{\sqrt{C_y}^3} = 0, \quad \beta_5 - \alpha_5 \frac{K_x}{\sqrt{C_y}^3} = 0. \quad (g)$$

Wegen des Verschwindens der höheren Ableitungen von q_x (von der zweiten Ableitung ab) folgt

$$\beta_4 = 0, \quad \beta_5 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0. \quad (h)$$

Damit verbleiben noch sechs Integrationskonstante zu bestimmen, wodurch die Randbedingungen befriedigt werden können. Diese lauten

$$\text{in } x = 0 \text{ und } x = a: \quad w = 0, \quad m_x = 0, \quad m_{xy} = 0. \quad (j)$$

Aus der Bedingung, daß die Drillungsmomente verschwinden müssen, folgt mit Hilfe der dritten Gleichung (16)

$$m_{xy} = C_y \frac{dq_y}{dx} = \frac{1}{\sqrt{C_y}} \left[\gamma_4 e^{+x/\sqrt{C_y}} - \gamma_5 e^{-x/\sqrt{C_y}} \right], \quad \gamma_4 = \gamma_5, \quad \gamma_4 (e^{+a/\sqrt{C_y}} - e^{-a/\sqrt{C_y}}) = 0$$

bzw.

$$\gamma_4 = \gamma_5 = 0, \text{ d. h. } q_y \equiv 0. \quad (l)$$

Unter Berücksichtigung von (g) und (h) verbleibt

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \frac{px^4}{24 K_x}, \quad (m) \\ q_x = -6 K_x \alpha_3 - px.$$

Wegen der Durchbiegungsbedingung ist

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = - \left[\alpha_2 a + \alpha_3 a^2 + \frac{pa^3}{24 K_x} \right] \quad (n)$$

Für das Biegemoment m_x ergibt sich damit unter Berücksichtigung der dritten Gleichgewichtsbedingung

$$m_x = -K_x (2\alpha_2 + 6\alpha_3 x) - \frac{px^2}{2} - (A_x - B_x)p,$$

woraus wegen der Randbedingungen folgt

$$\alpha_2 = -\frac{A_x - B_x}{2 K_x} p, \quad \alpha_3 = -\frac{pa}{12 K_x},$$

und mit (n)

$$\alpha_1 = \frac{A_x - B_x}{2 K_x} pa + \frac{pa^3}{24 K_x}.$$

Somit erhält man

$$w = \left[\frac{A_x - B_x}{2 K_x} pa + \frac{pa^3}{24 K_x} \right] x - \frac{A_x - B_x}{2 K_x} px^2 - \frac{pa}{12 K_x} x^3 + \frac{px^4}{24 K_x},$$

$$q_x = \frac{pa}{2} - px.$$

Entwickelt man noch w in eine Fouriersche Reihe mit der Periode $L = 2a$, so ergibt sich

$$w = \frac{4pa^2}{K_x \pi^3} \left\{ \frac{a^2}{\pi^2} \sum_{1,3,5} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} + (A_x - B_x) \sum_{1,3,5} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}.$$

Diese Lösung unterscheidet sich von jener nach der klassischen Theorie durch das Hinzutreten der unterstrichenen Terme⁸.

⁸ Girkmann: Flächentragwerke, 4. Aufl., Gleich. (829) u. (830).

(Eingegangen am 10. Juli 1958)

Alfred Basch†

Am 26. 8. 1958 verschied völlig unerwartet im 76. Lebensjahr der emeritierte o. Professor der allgemeinen und analytischen Mechanik an der Technischen Hochschule Wien, wirkl. Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Alfred Basch. Noch wenige Tage vor seinem Tode hatte er Vorbereitungen zu einer Reise nach Brüssel getroffen, wo er einen Vortrag auf der Jahrestagung der „International Association of University Professors and Lecturers“ halten sollte.

Werdegang und Wirken von Hofrat Basch wurden an dieser Stelle*) anlässlich seines 70. Geburtstages ausführlich geschildert. Auch nach seiner Versetzung in den dauernden Ruhestand im Jahre 1954 und seiner im Jahre 1956 erfolgten Emeritierung setzte Basch seine wissenschaftliche und publizistische Tätigkeit mit ungebrochener Schaffenskraft fort. Allein in dieser Zeitschrift erschienen noch drei Arbeiten, die sich mit Schwingungen von Systemen von zwei Freiheitsgraden und mit der Geometrie der ebenen Gasströmung befaßten. Weitere Veröffentlichungen aus dieser Zeit finden sich in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Basch stellt in diesen Arbeiten, wie schon in vielen früheren Untersuchungen, geometrische Überlegungen und geometrische Interpretationen in den Vordergrund.

Basch hat sich seine sonnige Natur bis zum Tode bewahrt. Wenn ihn etwas betrübte, so war es der Umstand, daß er seine Wanderfahrten in die von ihm so geliebte Bergwelt während der letzten Jahre allmählich hatte einschränken müssen.

Die Technische Hochschule in Wien, seine Freunde, Kollegen und Schüler in aller Welt werden ihm ein treues und ehrendes Andenken bewahren.

H. Parkus

*) Österr. Ingenieur-Archiv VI, 329. 1952.

Buchbesprechungen

Nichtlineare Mechanik. Von *H. Kauderer*. Mit 229 Textabb. XII, 684 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 64.50.

Der Titel folgt dem amerikanischen und russischen Sprachgebrauch, wo man mit nichtlinearer Mechanik gewöhnlich nur nichtlineare Probleme mit einer unabhängigen Variablen, insbesondere nichtlineare Schwingungen meint. Im ersten Abschnitt des vorliegenden Buches ist jedoch darüber hinaus ein spezielles Gebiet der nichtlinearen Elastizitätstheorie, nämlich die Theorie „kleiner“ Verformungen bei nichtlinearem Spannungsverzerrungsgesetz behandelt. Dieses, im Verhältnis zur Theorie „endlicher“ Verformungen bisher nur relativ wenig beachtete Gebiet verdankt seine Förderung zu einem guten Teil den Arbeiten des Verfassers, die er nunmehr im ersten Teil des Buches zusammengefaßt vorlegt. Man nimmt erfreut die schönen Fortschritte zur Kenntnis, die auf dem Gebiet der ebenen und achsialsymmetrischen Spannungszustände sowie der Torsion und Plattenbiegung bereits gemacht wurden.

Der erste Abschnitt des Buches steht nur in einem sehr losen Zusammenhang mit dem anschließenden Hauptteil, der rund drei Viertel des Gesamtumfanges einnimmt. Er ist den nichtlinearen Schwingungen mit einem Freiheitsgrad gewidmet, enthält aber auch ein fast 100 Seiten umfassendes Kapitel über Systeme mit einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden. Der Aufbau entspricht etwa den bekannten Büchern von *Stoker* und *Minorsky*, die Beispiele sind aber sämtlich der Mechanik entnommen.

Der Verfasser hat eine bemerkenswerte Leistung vollbracht und ein riesiges Material mit bewundernswertem Fleiß zusammengetragen und verarbeitet. Die Darstellung verliert sich vielleicht gelegentlich zu sehr in Einzelheiten, während wiederum manches fehlt, das man gerne gebracht sehen würde. Aber solche Wünsche sind natürlich immer subjektiv und können das Verdienst des Verfassers nicht schmälern.

Der behandelte Stoff hat in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen. Man darf dem Buch also eine weite Verbreitung voraussagen und wünschen.

H. Parkus, Wien

The Finite Twisting and Bending of Heated Elastic Lifting Surfaces. Von *R. L. Bisplinghoff*. (Mitteilungen aus dem Institut für Flugzeugstatik und Leichtbau an den ETH Zürich: Nr. 4.) Mit 50 Abb., 114 S., Zürich: Verlag Leemann. 1958. sfr. 14.50.

Schnellfliegende Flugkörper erfahren durch die Kompressibilität und die innere Reibung der Luft eine beträchtliche Aufheizung, wobei Wärmespannungen entstehen, während gleichzeitig die erhöhte Temperatur eine Abminderung der Festigkeitsbeiwerte des Werkstoffes bewirkt. Bei längerer Flugdauer ist damit der Geschwindigkeitssteigerung sehr bald eine Schranke gesetzt.

Die vorliegende Züricher Dissertation des bekannten Forschers und Professors am M.I.T. ist der Untersuchung dieser Wärmespannungen und ihrer Einflüsse auf die Stabilität in Rechteckplatten und flachen Zylinderschalen gewidmet. Zunächst werden auf der Theorie von *Marquerre* aufbauend die Grundgleichungen der flachen Schale mit Einschluß von Temperatureffekten aufgestellt, die zugehörigen Minimalprinzipie formuliert und Stabilitätskriterien besprochen. Die Theorie wird dann auf verschiedene Sonderfälle angewendet, wobei nach *E. Reissner* näherungsweise eine plausible Biegefläche angenommen und die partielle Differentialgleichung damit auf eine gewöhnliche reduziert wird. Passende Temperaturverteilungen werden eingeführt. An Stelle der Differentialgleichung wird auch eine Integralgleichung verwendet und schließlich als dritte Möglichkeit das *Ritzsche* Verfahren herangezogen. Die Rechenergebnisse werden mit gleichfalls vom Verfasser durchgeführten Versuchen verglichen. Auch Schwingungen werden untersucht, die sich den bereits verformten Platten überlagern.

Die außerordentlich sorgfältig durchgeführte Arbeit stellt einen wertvollen Beitrag zur „Aerothermoelastizität“ dar und ist jedem auf diesem Gebiet Tätigen zum gründlichen Studium zu empfehlen.

H. Parkus, Wien

Indeterminate Structural Analysis. Von *J. St. Kinney*. Mit zahlreichen Textabb., XIII, 655 S. Reading, Mass. USA: Addison-Wesley Publ. Comp. Inc. 1957. Geb. \$ 9.50.

Das Buch bringt eine schöne und ausführliche Zusammenstellung der baustatischen Methoden und behandelt insbesondere die statisch unbestimmten Systeme. Die übersichtliche Darstellung ermöglicht es jedem mit den Grundlagen der Statik vertrauten Leser, dem Verfasser unschwer zu folgen. Mit Beispielen (allerdings im anglo-amerikanischen Maßsystem) wurde nicht gespart. Recht interessant ist die vom Verfasser entwickelte Methode des „konjugierten Tragwerks“, eine Erweiterung des Verfahrens der elastischen Gewichte. Im Gegensatz zu dem bekannten Mohrschen Ver-

fahren, wo sich alles in derselben Ebene abspielt, liegt hier das dem gegebenen (vertikalen) Tragwerk zugeordnete System in einer horizontalen Ebene, und auf dieses konjugierte System wirkt die Momentenbelastung in vertikaler Richtung ein. — Was das Buch besonders lebendig macht, sind die zahlreichen historischen Hinweise im Text. Das erste Kapitel bringt eine sehr hübsche Zusammenfassung der geschichtlichen Entwicklung der Baustatik von den Anfängen der Zivilisation bis heute. Den Abschluß des Buches bildet ein Kapitel über die verschiedenen Möglichkeiten, baustatische Größen (Einflußlinien usw.) aus Modellversuchen zu gewinnen. — Das Buch kann für Studium und Praxis bestens empfohlen werden.

F. Chmelka, Wien

Vibration and Impact. Von R. Burton. Mit zahlreichen Textabb. X, 310 S. Reading Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1958. Geb. \$ 8.50.

Das Buch ist als Lehrbuch, wie solche an amerikanischen Universitäten den Vorlesungen zugrunde gelegt werden, für Studenten des Maschinenbaues geschrieben. Die mathematischen Ansprüche an den Leser sind denkbar bescheiden; mehr als die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung wird nicht verlangt. Diese Beschränkung zwingt natürlich den Verfasser zu einigen Umwegen bei der Auflösung der auftretenden Differentialgleichungen. Man muß ihm aber zugestehen, daß er sich seiner schwierigen Aufgabe mit großem Geschick entledigt.

Der Inhalt des Buches ist erstaunlich vielfältig. Nach einem kurzen historischen Überblick wird zunächst der lineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad ausführlich behandelt, wobei auch einiges über selbsterregte Schwingungen zur Sprache kommt. Einige einfache Stoßvorgänge, bewegte Lasten und plötzlich aufgebrachte Kräfte folgen nebst einem kurzen Hinweis auf die statistische Behandlung unregelmäßig auftretender Kräfte. Daran schließt ein mehr beschreibend gehaltenes Kapitel über nichtlineare Schwingungen und ein weiteres über Schwingungsmessungen. Die linearen Systeme mit zwei Freiheitsgraden werden wieder ausführlich behandelt, wobei auch Schwingungstilger und Schwingungsdämpfer besprochen werden. Für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden werden — mit vollem Recht — nur Näherungsmethoden gebracht, nämlich das Holzer'sche Verfahren in seiner einfachsten Form und die Matrizeniteration. Es wird auch gezeigt, wie man bei der Berechnung der höheren Eigenwerte und Eigenfunktionen vorzugehen hat. In das numerische Beispiel auf Seite 210 hat sich leider ein sinnstörender Fehler eingeschlichen. Es folgt nun weiter der Übergang zum Kontinuum und ein kurzer Abschnitt über Regelungsvorgänge. Den Abschluß bildet ein Kapitel über Ermüdungsfestigkeit.

Das Buch ist sehr anregend und durchaus in der Sprache des Ingenieurs geschrieben. Wie bei allen Publikationen des Verlages sind auch hier die sauberen und klaren Zeichnungen hervorzuheben.

H. Parkus, Wien

Verformung und Fließen des Festkörpers. Kolloquium Madrid 26. bis 30. September 1955. Herausgegeben von R. Grammel. (Internationale Union für theoretische und angewandte Mechanik.) Mit 188 Textabb., XII, 324 S. Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 37.50.

Der Zweck des Madrider Kolloquiums war, wie der Herausgeber in einer sehr schön geschriebenen Einführung darlegt, die Brücke zu schlagen zwischen den Vertretern der Mechanik einerseits und denen der Festkörperphysik andererseits. Wenn man miterlebt, wie die Mechanik seit einigen Jahrzehnten bemüht ist, die Idealisierungen ihrer klassischen Zeit Schritt für Schritt abzubauen und damit der Realität näherzukommen, dann weiß man, wie wichtig eine solche Kontaktaufnahme geworden ist. Dem Zweck des Kolloquiums entsprechend sind die meisten Vorträge referierender Natur. Sie sind nach drei Themengruppen unterteilt: Versetzungen und Plastizität, Nichtlineare Elastizität, Viskoelastizität und Relaxation. Insgesamt wurden 27 Vorträge gehalten. Man ist dem Verlag für die Herausgabe zu Dank verpflichtet und darf hoffen, daß sich solche Veranstaltungen in regelmäßigen Abständen wiederholen werden. Wer sich mit Elastizität und Plastizitätstheorie beschäftigt, wird das Buch mit Nutzen studieren.

H. Parkus, Wien

Autorenverzeichnis

- Buckens, F.**, Über Eigenwertscharen. S. 82.
- Bukovics, E.**, Prinzipien bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Methoden zur Abschätzung des Fehlers. S. 66.
- Chmelka, F.**, Indeterminate Structural Analysis. Von J. St. Kinney. (Buchbesprechung.) S. 111.
- Frame, J. S.**, Eine Lösung in Kettenbrüchen für die Kármánsche Theorie der Rohrbiegung. S. 95.
- Girkmann, K. und R. Beer**, Anwendung der verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten. S. 101.
- Gran Olsson, R.**, Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. S. 93.
- Hofmann, H.**, Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld. S. 3.
- Huber, A.**, Parallelstromrekuperatoren mit temperaturabhängiger Wärmedurchgangszahl. S. 41.
- Kirste, L.**, Druckstäbe geringsten Gewichts. S. 36.
- Müller, W.**, Zur Ableitung der elastostatischen Gleichungen für die Rotationsschalen aus dem Minimalprinzip der Variationsrechnung. S. 59.
- Parkus, H.**, Alfred Basch†. S. 110.
- , Nichtlineare Mechanik. Von H. Kauderer. (Buchbesprechung.) S. 111.
- , The Finite Twisting and Bending of Heated Elastic Lifting Surfaces. Von R. L. Bisplinghoff. (Buchbesprechung.) S. 111.
- , Vibration and Impact. Von R. Burton. (Buchbesprechung.) S. 112.
- , Verformung und Fließen des Festkörpers. Herausgegeben von R. Grammel. (Buchbesprechung.) S. 112.
- Scholz, H.**, Das Verfahren von Krylow-Bogoljubow zur Behandlung nichtlinearer Schwingungsprobleme. S. 47.
- Schulz, F.**, Franz Magyar†. S. 1.
- Torre, S.**, On the Motion of Plastic Mass. S. 25.

Soeben erschienen:

Kolbenringe

Von
Dr.-Ing. Carl Englisch
In zwei Bänden

Band I

Theorie, Herstellung und Bemessung

Mit 485 Textabbildungen. VII, 457 Seiten. Gr.-8°. 1958
Ganzleinen S 468.—, DM 78.—, sfr. 79.90, \$ 18.55

Band II

Betriebsverhalten und Prüfung

Mit 245 Textabbildungen und 137 Einzelbildern im Anhang. VI, 331 Seiten
Gr.-8°. 1958
Ganzleinen S 372.—, DM 62.—, sfr. 63.50, \$ 14.75

Die Bedeutung des Kolbenringes als eines der wichtigsten Bauteile jeder Kolbenmaschine steht außer Frage, da von seiner richtigen Arbeitsweise in den meisten Fällen der störungsfreie und wirtschaftliche Betrieb der Maschine abhängt. Wegen seiner unzugänglichen Lage als freies Element im bewegten Kolben gehört er zu den im Betrieb am schwierigsten zu beobachtenden und zu überwachenden Maschinenteilen. Es ist daher nicht verwunderlich, wenn über die mechanischen und thermischen Beanspruchungen sowie über die Bewegungsverhältnisse dieses Verschleißteiles bis jetzt wesentlich weniger exakte Unterlagen zur Verfügung stehen als für die meisten anderen Maschinenelemente. Mit dem Werk von *Englisch* liegt nun eine umfassende, die neueste Entwicklung berücksichtigende Darstellung des Gesamtgebietes der Kolbenringe vor, die ausführlich auf alle Fragen der Fertigung und Verwendung eingeht. In vier Hauptabschnitten behandelt das zweibändige Werk die Theorie der Kolbenringe und Ringdichtungen, die Herstellung von Kolbenringen, den Aufbau von Ringdichtungen, das Verhalten der Kolbenringe im Betrieb und schließlich die Prüfung von Kolbenringen. Der Maschinenbauer, der vor der Wahl eines geeigneten Werkstoffes steht, der über die Gestaltung der Ringe, die Bemessung des Anpreßdruckes, die Anordnung der Ringe im Kolben und viele andere Detailfragen eine Entscheidung treffen muß, findet hier eine verlässliche Arbeitsunterlage.

Während sich der I. Band vorwiegend mit der Theorie des Kolbenringes und seiner Herstellung und Gestaltung befaßt, erörtert der II. Band die Probleme des Kolbenringes in der Praxis. Der Aufbau der Ringdichtungen, Schmierung und Schmierölverbrauch, Ring- und Zylinderverschleiß sowie die mit Kolbenringen zu beobachtenden Schwierigkeiten, wie das Ringstecken und Ringbrechen, werden eingehend erörtert. Es werden ferner Hinweise für die Prüfung von Kolbenringen gegeben und schließlich ergänzt ein Anhang mit Schliffbildern von richtiger und fehlerhafter Gefügeausbildung in den heute verwendeten Ringwerkstoffen die Darstellung.

VIIIth International Astronautical Congress. VIII. Internationaler Astronautischer Kongress. VIII^e Congrès International d'Astronautique. Barcelona 1957. Proceedings / Bericht / Comptes rendus. Herausgegeben von/ Editorial Board/Comité des Rédacteurs P. J. Bergeron, W. v. Braun, K. A. Ehricke, F. Hecht, J. Marial, E. Sänger, K. Schütte, L. I. Sedov, L. R. Shepherd, S. F. Singer. Schriftleitung/Editor-in-Chief/Rédacteur en chef F. Hecht. Mit 233 Figuren. VII, 607 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 750.—, DM 125.—, sfr. 128.—, \$ 29.75

Vorzugspreis für Mitglieder der IAF und für Bezieher der „Astronautica Acta“

Ganzleinen S 600.—, DM 100.—, sfr. 102.40, \$ 23.80

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Rechnen in der Chemie. Eine Einführung. Von Dr. techn. Ing. Walter Wittenberger, Offenbach/Main (früher Avestig/Elbe und Bofors/Schweden).

Erster Teil: Mit 273 entwickelten Übungsbeispielen, über 1400 Übungsaufgaben samt Lösungen und 78 Abbildungen. Vierte, verbesserte Auflage. IX, 330 Seiten. 8°. 1958.

Ganzleinen flexibel S 108.—, DM 18.—, sfr. 18.40 \$ 4.30

Zweiter Teil: Mit über 500 entwickelten Übungsbeispielen und Übungsaufgaben samt Lösungen und 116 Abbildungen. XII, 375 Seiten. 8°. 1950.

Steif geheftet S 112.—, DM 18.90, sfr. 19.50, \$ 4.50

Das pädagogisch geschickt aufgebaute Buch geht aus von einem Abschnitt über allgemeines Rechnen, welcher auch die Flächen- und Inhaltsberechnungen, das Rechnen mit Logarithmen und den Gebrauch des Rechenschiebers sowie die Grundzüge des graphischen Rechnens enthält. Sodann werden das spezifische Gewicht und die Mischungsrechnung ausführlich behandelt. In sehr gründlicher Weise wird in die Stöchiometrie eingeführt, einschließlich der Anwendung der Gasgesetze und der einfacheren physikalisch-chemischen Aufgaben. Da jedem Abschnitt mehrere voll entwickelte Beispiele vorangestellt sind, wurde erreicht, daß auch der Anfänger Freude am chemischen Rechnen gewinnt. Das ausführliche Tabellenmaterial am Schluß des Buches ermöglicht seine Verwendung auch während der späteren Berufstätigkeit.

Pregl-Roth, Quantitative organische Mikroanalyse. Von Dr. H. Roth, Badische Anilin- und Sodafabrik A. G. Ludwigshafen a. Rhein, Landwirtschaftliche Versuchsstation Limburgerhof/Pfalz. Siebente, vollkommen neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 115 Textabbildungen. XIII, 361 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

Die Preglschen Methoden werden entsprechend ihrer nach wie vor überragenden Bedeutung und vorzugsweisen Anwendung eingehend beschrieben. Sie dienen in hervorragender Weise zur Aneignung der für jeden Mikroanalytiker nötigen Grundkenntnisse und Fähigkeiten und vielfach als Grundlage für die Weiterentwicklung der mikroanalytischen Methodik, wie sie in dieser Neuauflage sinnfälligen Ausdruck findet.

Anwendung von Spritzbeton. Von Dipl.-Ing. Ernst Rotter, Kaprun, Obergeringenieur der Baugesellschaft H. Rella & Co., Wien. Mit 5 Textzeichnungen, 19 ganzseitigen Bildern und 2 Maßzeichnungen im Anhang. 44 Seiten. 8°. Unveränderter Neudruck 1958. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes. Heft 35.)

Steif geheftet S 42.—, DM 7.—, sfr. 7.20, \$ 1.65

Wege und Ziele der Wirtschaft Österreichs. Von Dr. Carl Hudeczek, Botschafter a. D., Ehem. Leiter der wirtschaftspolitischen Abteilung des Bundeskanzleramtes (Auswärtige Angelegenheiten), Wien. VIII, 271 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 198.—, DM 33.—, sfr. 33.80, \$ 7.85

„Für jeden österreichischen Patrioten ist es erfreulich zu sehen, wie dem Autor der einwandfrei belegte Nachweis für die wirtschaftliche Lebensfähigkeit unseres Landes gelingt, dessen ruhige Entwicklung zu erhalten Aufgabe jedes einzelnen Bürgers ist. Dr. Hudeczek bleibt in seinem Buch bei Österreich nicht stehen. Er befaßt sich ausführlich mit den Plänen zur wirtschaftlichen Integration Europas, wobei er auf Vorteile und Nachteile gleichermaßen hinweist und damit wieder einen Nachweis der Objektivität seiner Darstellung liefert. Wer immer sich mit Österreichs Wirtschaft auseinandersetzen will, sollte zu dieser Veröffentlichung greifen, die in jedem Fall eine Fülle wertvoller Aufschlüsse vermittelt und Anregungen zur intensiven Beschäftigung mit dem einen oder anderen Wirtschaftszweig auslöst.“

Wiener Zeitung

Probleme und Grenzen der Atomgesetzgebung. Von DDr. Berthold Moser, Rechtsanwalt in Salzburg. V, 65 Seiten. 8°. 1958.

Steif geheftet S 36.—, DM 6.—, sfr. 6.10, \$ 1.45

Vom Gesetzesstaat zum Richterstaat. Recht als Maß der Macht. Gedanken über den demokratischen Rechts- und Sozialstaat. Von René Marcic. XV, 548 Seiten. Gr.-8°. 1957.

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung